ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE
MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 14 Oktober 1934 Heft 5

Inhalt:

Seite
Hauptaufsätze. M. Adler: Strömung in gekrümmten Rohren . . . 257
E. J. Nyström: Planimetrische Auswertung von Stieltjesintegralen . . . 276
F. Weinig: Beitrag zur Theorie dünner schwach gewölbter Tragflügelprofile . . . 279
H. Buchholz: Die zweidimensionale Wärmeströmung des Beharrungszustandes im rechteckigen Querschnitt geblätterter Eisenkörper bei flächenhaft, unstetig oder stetig verteilten Wärmequellen . . . 285
J. F. Böttcher: Die maximale Feldstärke und die Kapazität der Drehstromkabel . . . 295
Kleine Mitteilungen. R. Feinberg: Fourier-Analyse von Kurvenzügen, die stückweise aus Ausschnitten von Sinuslinien zusammengesetzt sind 311
H. Reißner: Spannungsverteilung in der Gurtplatte einer Rippendecke . . . 312
M. J. Gercke: Formänderung und Beanspruchung dünner kreiszylindrischer Ringe und Rohre . . . 313
L. Collatz: Die Berechnung von Eigenschwingungen einer gleichseitig dreieckigen Membran mit Hilfe von Sechsecksnetzen . . . 315
Buchbesprechungen. Jahnke und Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. — Lehr: Spannungsverteilung in Konstruktionselementen. — Pozděna: Meter und Kilogramm. — Scheffers: Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? — Menninger: Zahlwort und Ziffer. — Steinitz und Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. — Weiter eingegangene Bücher . . . 317
Nachrichten . . . 319
Zuschriften an den Herausgeber . . . 320

HAUPTAUFSÄTZE

Strömung in gekrümmten Rohren*).

Von *M. Adler* in Wembley (England).

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.)

Die Hauptmerkmale der Strömung durch gekrümmte Rohre sind die Veränderung der Strömungsform und die Vergrößerung des Widerstandes gegenüber der geraden Rohrströmung. Hinsichtlich der Strömungsform ist für den Krümmer das Auftreten einer Sekundärströmung charakteristisch, die sich der Hauptströmung überlagert. Ihre Ausbildung wird dadurch erklärt, daß sich die in der Mitte des Rohres mit größerer Geschwindigkeit fließenden Flüssigkeitsteile durch ihre größere Zentrifugalkraft an die Außenwand drängen und dabei die dortigen langsameren Partien in zwei Teilströmen über oben und über unten gegen die Innenwand schieben. Auf diese Weise erhält die Sekundärströmung die in Abb. 1 angedeutete Form eines Doppelwirbels. Durch Überlagerung der Sekundärströmung mit der Hauptströmung entsteht eine schraubenähnliche Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteile. Die Sekundärströmung hat zur Folge, daß die Stelle größter Geschwindigkeit von der Mitte nach außen verschoben wird und ist die Ursache der Widerstandsvermehrung in gekrümmten Rohren.

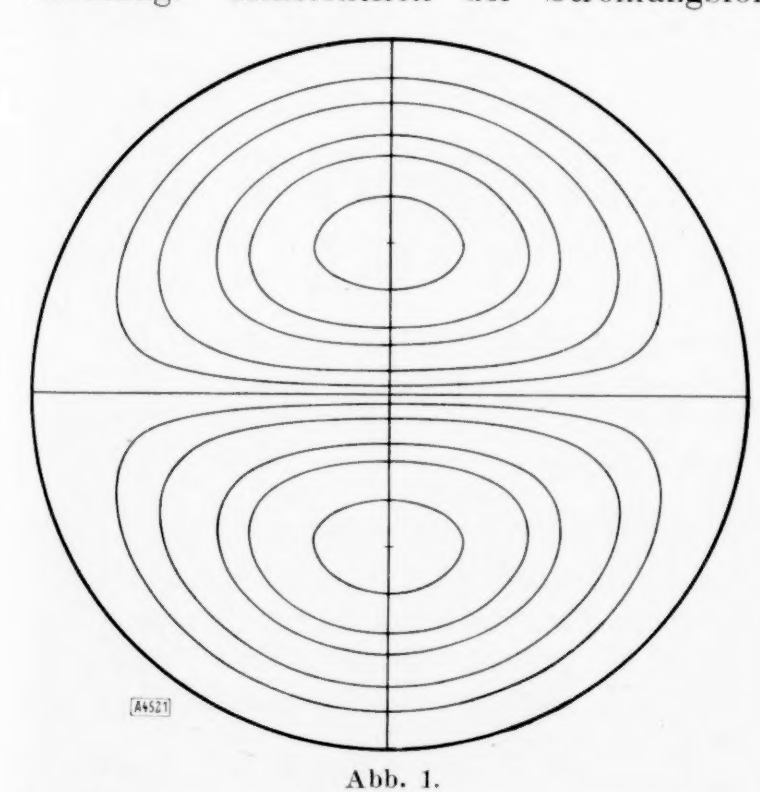


Abb. 1.

Beide Erscheinungen, Veränderung der Strömungsform und Widerstandserhöhung, waren bisher Gegenstand vieler experimenteller Untersuchungen. Das Auftreten der Sekundärströmung haben Eustice[1]) und Taylor[2]) durch Einführung von Farbfäden in die Strömung sichtbar gemacht. Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung sind von Saph und

*) Dissertation Technische Hochschule München. 1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. D. Thoma, 2. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W. Kaufmann. Die Anregung zu dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr. L. Prandtl, dem ich für die stets wohlwollende Unterstützung und die wertvollen Ratschläge bei der Durchführung meinen ergebensten Dank ausspreche.

[1]) J. Eustice: Flow of Fluids in Curved Passages. Engineering Bd. 120 (1925), S. 604.

[2]) G. J. Taylor: The Criterion for Turbulence in Curved Passages. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 124 (1929), S. 243.

Schoder[3]) ausgeführt worden. Wegen der technischen Wichtigkeit von Rohrkrümmungen ist es verständlich, daß vor allem der Einfluß der Sekundärströmung auf den Widerstand und die technisch besonders stark interessierenden Widerstandszahlen, hauptsächlich im turbulenten Bereich, eingehend experimentell untersucht worden sind. An neueren Arbeiten seien erwähnt die Forschungsarbeit von Nippert[4]), in der die Verlustbildung in Krümmern mit rechteckigem und kreisförmigem Querschnitt in Abhängigkeit von den sie beeinflussenden Faktoren untersucht worden ist, sowie die Arbeit von Richter[5]), der auch die Laminarströmung behandelt, und die im Hydraulischen Institut der Technischen Hochschule München ausgeführten Versuche[6]).

Demgegenüber ist die Zahl der theoretischen Untersuchungen über die Strömung in gekrümmten Rohren noch sehr gering. Von Bedeutung ist in dieser Hinsicht die Arbeit von Dean[7]), der unter Annahme kleinen Krümmungsverhältnisses $\frac{a}{R}$ (a = Rohrradius, R = mittlerer Krümmungsradius) in sukzessiver Näherung, die bis zum 4. Schritt getrieben wird, aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen eine Widerstandsformel errechnet, die von dem Parameter $\frac{G^2 a^7}{\mu^2 \nu^2 R}$ (G = Druckgefälle, μ = Zähigkeit, ν = kinematische Zähigkeit) abhängig ist. Die errechnete Funktion ist aber nur im laminaren Bereich bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen brauchbar. Jedoch ermöglicht es die Kenntnis des Parameters, auch außerhalb des kleinen Bereiches experimentelle Ergebnisse auf die gefundene Abhängigkeit nachzuprüfen. Dieser Aufgabe unterzieht sich White[8]), der den Deanschen Parameter auf die Form $Re\left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(Re = \frac{\bar{c}\, d}{\nu} = \text{Reynoldssche Zahl},\ \bar{c} = \text{mittlere Geschwindigkeit},\ d = \text{Rohrdurchmesser}\right)$ umrechnet.

Aufgabe dieser Arbeit soll es sein, auf Grund der Prandtlschen Grenzschichtbetrachtung eine Theorie zu entwickeln, die für laminare Strömung, aber für größere Reynoldssche Zahlen bis zum kritischen Gebiet brauchbar ist. Außerdem sollen Widerstand und Geschwindigkeitsverteilung, im laminaren und im turbulenten Bereich, experimentell untersucht werden.

I. Theoretischer Teil.

1. Theorie der laminaren Strömung für kleine Reynoldssche Zahlen und kleine Krümmungen.

Zu dem von Dean erzielten Ergebnis kann man auch auf einem anderen Weg gelangen, der hier kurz angedeutet sein soll. Man geht dabei aus von den auf Zylinderkoordinaten umgerechneten Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen. u und v seien die Geschwindigkeiten in Richtung der rechtwinkligen Koordinaten x und y eines Rohrquerschnittes, der mit dem Nullquerschnitt den Winkel φ um die Achse durch den Krümmungsmittelpunkt bildet. w sei die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung. Der Krümmungsradius R des Rohres sei groß gegen den Radius a des Rohrquerschnittes. Das Krümmungsverhältnis $\frac{a}{R}$ wird infolgedessen klein und sei von der Größenordnung ε.

Für die Geschwindigkeiten u, v, w schreiben wir jetzt die Reihen:

$$\left.\begin{array}{lll} u = \underset{\varepsilon}{u_1} + \underset{\varepsilon^2}{u_2} + \dots & v = \underset{\varepsilon}{v_1} + \underset{\varepsilon^2}{v_2} + \dots & w = \underset{1}{w_0} + \underset{\varepsilon}{w_1} + \underset{\varepsilon^2}{w_2} + \dots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

an und vergleichen die Größenordnung ihrer Glieder mit der Größenordnung ε von $\frac{a}{R}$. Das Glied w_0 der Hauptgeschwindigkeit w ist gleich der Geschwindigkeit, die vorhanden wäre, wenn das Rohr keine Krümmung hätte und möge von der Größenordnung 1 sein. Die entsprechenden Glieder von u und v sind Null, da im geraden Rohr keine Sekundärströmung auftritt. Der Einfluß der Krümmung macht sich erst von w_1 ab geltend. Dieses Glied ist von der Größenordnung der Krümmung $\frac{a}{R} = \varepsilon$, ebenso wie die Glieder u_1 und v_1 der Sekundärströmung. Die folgenden Glieder werden immer kleiner, von der Größenordnung ε^2, ε^3 usw. Die Reihenansätze (1) führen wir in die Bewegungsgleichungen ein. Berück-

[3]) A. V. Saph und E. W. Schoder: Discussion on Flow of Water in Pipes. Trans. Amer. Soc. Civ. Eng. Bd. 47 (1902), S. 295.
[4]) H. Nippert: Über den Strömungswiderstand in gekrümmten Kanälen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 320 (1929).
[5]) H. Richter: Der Druckabfall in gekrümmten glatten Rohrleitungen. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 338 (1930).
[6]) D. Thoma: Der hydraulische Verlust in Formstücken. World Power Conference, Sect. Meeting, Nr. 26, Tokyo 1929.
[7]) W. R. Dean: The Streamline Motion of Fluid in a Curved Pipe. Phil. Mag. (7), Bd. 4 (1927), S. 208 und Bd. 5 (1928), S. 673.
[8]) C. M. White: Steamline Flow trough Curved Pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 123 (1929), S. 645.

sichtigen wir dann zunächst nur die Glieder von der Größenordnung 1, so erhalten wir aus der dritten Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung mit der einzigen Unbekannten w_0. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die Poiseuillesche Gleichung für die gerade Rohrströmung. Dann gehen wir einen Schritt weiter. Zur Berechnung der ersten Näherung der Sekundärströmung berücksichtigen wir nur die Glieder von der Größenordnung ε und erhalten aus den beiden ersten Bewegungsgleichungen nach Elimination des Druckgliedes eine Differentialgleichung mit den Unbekannten u_1 und v_1 und der jetzt schon bekannten Funktion w_0. Eine der beiden Unbekannten läßt sich aus dieser Differentialgleichung bestimmen, die andere ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung, für die natürlich auch nur die ε-Glieder anzuschreiben sind. Mit den nun bekannten Werten w_0, u_1 und v_1 kann man jetzt w_1 aus der dritten Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung aller von der Größenordnung ε verschiedenen Glieder berechnen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man immer bessere Annäherungen erzielen. Diese Aufgabe scheitert jedoch sehr bald an der immer schwieriger werdenden Lösung der Differentialgleichungen.

Aus der Geschwindigkeitsverteilung in Strömungsrichtung kann durch Integration über den Rohrquerschnitt die Durchflußmenge Q berechnet werden. Bezieht man sie auf die Durchflußmenge Q_0 des geraden Rohres, die bei dem gleichen Druckgefälle zustande kommt, so kann man den Quotienten $\frac{Q}{Q_0}$ als Maß für den Verlust ansehen, der durch die Krümmung verursacht wird. Bei dem erreichten Stand der Näherung ist mit

$$K = \left(\frac{1}{24}\,\frac{\partial p}{R\,\partial \varphi}\right)^2 \frac{a^7}{8\,\mu^2\,\nu^2\,R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$\left(\frac{\partial p}{R\,\partial \varphi}\right.$ = Druckgefälle in Strömungsrichtung, bezogen auf die Längeneinheit, μ = Zähigkeit, ν = kinematische Zähigkeit$\left.\right)$:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - 0{,}03048\,K^2 + 0{,}01195\,K^4 \ \text{[9]} \quad \ldots \ldots \ldots (3).$$

Über den Gültigkeitsbereich dieser Formel läßt sich folgendes aussagen: Der Verlust ist um so größer, je stärker bei gleichbleibender Durchflußgeschwindigkeit das Rohr gekrümmt ist, je größer also das Krümmungsverhältnis $\frac{a}{R}$, und damit auch K, ist. Mit wachsendem K muß also $\frac{Q}{Q_0}$ kleiner werden. Das Minimum von $\frac{Q}{Q_0}$, errechnet aus Gl. (3), liegt angenähert bei $K = 1{,}12$; von da ab beginnt sein Wert mit wachsendem K wieder zu steigen, d. h., bei $K = 1{,}12$ ist die Lösung bei dem erreichten Stand der Näherung sicherlich nicht mehr verwendbar. Für Wasser von 15° C, das durch ein schwach gekrümmtes Rohr mit 1 cm Ø und dem Krümmungsverhältnis $\frac{a}{R} = \frac{1}{1600}$ ($R = 8$ m) fließt, entspricht diesem K-Wert ein Druckgefälle von $3 \cdot 10^{-6}$ kg/cm³ oder 3 mm W.-S. für 1 m Rohrlänge und eine Reynoldssche Zahl von Re = 700. Für eine stärkere Krümmung $\frac{a}{R} = \frac{1}{400}$ ($R = 2$ m) dürfte das Wasser an der Grenze des Gültigkeitsbereiches der Näherung nur mit einem Druckgefälle von $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ kg/cm³ und einer Reynoldsschen Zahl von 350 durch das Rohr fließen.

Beim Geschwindigkeitsprofil ist innerhalb dieses Bereiches keine wesentliche Abweichung von dem Profil des geraden Rohres vorhanden. In Abb. 2 ist ein Geschwindigkeitsprofil für einen speziellen Fall

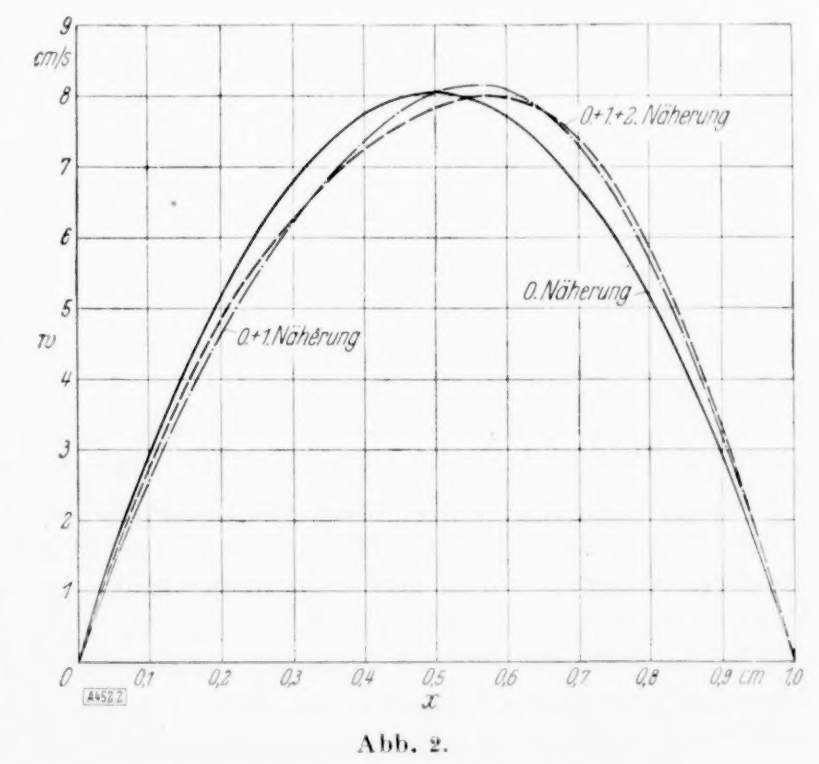


Abb. 2.

$$\left(\frac{\partial p}{R\,\partial \varphi} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{kg/cm}^3, \quad \frac{a}{R} = \frac{1}{800}, \quad R = 4\ \text{m}, \quad \nu = 0{,}01145\ \text{cm}^2/\text{s}\right)$$

in seinen einzelnen Näherungen aufgezeichnet.

[9] Als Zahlenfaktor von K^2 erhält Dean 0,03058. Der Unterschied erklärt sich durch einige Vernachlässigungen in der Deanschen Rechnung.

Man sieht also, daß vorliegende Theorie nur für ein begrenztes Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahlen und kleiner Krümmungen brauchbar ist. Die Abhängigkeit vom Parameter K ist natürlich auch im weiteren Bereich der laminaren Strömung vorhanden, nur läßt sich keine Aussage darüber machen, durch welche Funktion er dargestellt ist. Wohl aber ist die Kenntnis des Parameters dazu geeignet, experimentelle Ergebnisse nachzuprüfen, indem man $\frac{Q}{Q_0}$ über K aufträgt. Die Versuchspunkte, die verschiedenen Versuchsbedingungen, vor allem auch verschiedenen Krümmungen entsprechen, müssen sich auf einer einzigen Kurve anordnen, falls die Gültigkeit des Parameters zutrifft. White[10]) hat eine solche Prüfung vorgenommen und dabei eine gute Bestätigung gefunden. Er gestaltet lediglich in formaler Weise die Beziehung $\frac{Q}{Q_0} = f(K)$ oder $\frac{Q_0}{Q} = f_1(K)$ um. Für die linke Seite kann man schreiben:

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{\bar{c}_0}{\bar{c}} = \frac{a^2}{8\mu} \frac{\partial p}{R\partial\varphi} \frac{1}{\bar{c}} = \frac{1}{64} \frac{\bar{c}\,d}{\nu} \frac{\partial p}{R\partial\varphi} \frac{d}{\varrho \frac{\bar{c}^2}{2}} = \frac{\lambda}{\lambda_0}.$$

Dabei ist $\lambda = \frac{\partial p}{R\partial\varphi} \frac{d}{\varrho \frac{\bar{c}^2}{2}}$ definitionsgemäß die Widerstandszahl des gekrümmten Rohres (Druckgefälle bezogen auf den Staudruck der mittleren Durchflußgeschwindigkeit) und $\lambda_0 = \frac{64}{\frac{\bar{c}\,d}{\nu}}$ die Widerstandszahl des geraden Rohres bei der gleichen mittleren Durchflußgeschwindigkeit. $K = \left(\frac{1}{24} \frac{\partial p}{R\partial\varphi}\right)^2 \frac{a^7}{8\mu^2\nu^2 R}$ läßt sich umformen zu $K = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12} \frac{\bar{c}\,d}{\nu} \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$, so daß man schließlich mit $\mathrm{Re} = \frac{c\,d}{\nu}$ die Beziehung erhält:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = f\left[\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^1\right].$$

Auf diese Beziehung wird im Zusammenhang mit den experimentellen Ergebnissen noch einzugehen sein.

2. Theorie der laminaren Strömung für große Reynoldssche Zahlen. Im folgenden soll nun der Versuch gemacht werden, eine Darstellung zu finden, die für große Reynoldssche Zahlen im laminaren Bereich brauchbar ist. Den Grundgedanken für eine solche Lösung bietet die Prandtlsche Grenzschichttheorie[11]). Danach hat man nur innerhalb einer sehr dünnen Schicht an der Begrenzung der Flüssigkeit, der Grenzschicht, in der wegen des Haftens der Flüssigkeit an der Wand die Strömungsgeschwindigkeit auf Null abnimmt, infolge des großen Geschwindigkeitsgradienten wesentliche Reibungswirkung. Außerhalb dieser Grenzschicht, wo keine so großen Geschwindigkeitsgradienten auftreten, ist die Wirkung der Zähigkeit nur von sehr geringer Bedeutung, so daß sich dort annähernd eine Strömung von der Art derjenigen in einer reibungslosen Flüssigkeit einstellen wird, die nur durch Druckwirkungen bedingt ist. Nimmt man die Grenzschichtdicke als klein an, so kann man durch eine Größenordnungsbetrachtung die strengen Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen vereinfachen, indem man die Glieder geringerer Größenordnung vernachlässigt. Auf diese Weise gelangt man zu der Differentialgleichung der Grenzschicht.

Gemäß dieser Grenzschichttheorie nehmen wir nun auch bei der Strömung im gekrümmten Rohr eine Grenzschicht von der Dicke δ an, innerhalb der die Reibung zu berücksichtigen ist. Genügend weit vom Rohreinlauf ist δ unabhängig von der Rohrlänge und nur eine Funktion des Winkels ψ (Abb. 3). Außerhalb der Grenzschicht haben wir einen Strömungskern, in dem wir Reibungslosigkeit annehmen.

Wir wollen jedoch nicht die Differentialgleichung der Grenzschicht als Grundlage verwenden, sondern eine Impulsbetrachtung für die Grenzschicht als Ausgangspunkt für die Rechnung nehmen, eine Methode, die v. Kármán[12]) angegeben hat und die für eine Reihe von Fällen von K. Pohlhausen[13]) unter vereinfachenden Annahmen für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht durchgerechnet ist.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein (Abb. 3): x und y bzw. r und ψ sind die rechtwinkligen bzw. Polarkoordinaten des kreisförmigen Rohrquerschnittes mit dem Radius a.

[10]) C. M. White: a. a. O.
[11]) L. Prandtl: Verhandl. des III. Intern. Math. Kongr. 1904. (Heidelberg), Leipzig 1905, S. 484.
[12]) Th. v. Kármán: Über laminare und turbulente Reibung, Z. ang. Math. u. Mech. Bd. 1 (1921), S. 233.
[13]) K. Pohlhausen: Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht, Z. ang. Math. u. Mech. Bd. 1 (1921), S. 252.

Der Winkel φ ist die dritte Koordinate. Sein Scheitel liegt im Krümmungsmittelpunkt 0 des Rohres, sein Bogen steht senkrecht zum Rohrquerschnitt, in Richtung der Rohrachse. Die Strömung erfolgt in Richtung des wachsenden φ. Die Geschwindigkeitskomponenten im Strömungskern sind U, V, W. W ist die Hauptgeschwindigkeit, U und V sind die sehr kleinen (vgl. S. 263) Komponenten der Sekundärströmung in Richtung von x und y. Die Sekundärströmung in der Grenzschicht hat die Komponenten u in Richtung von r und v senkrecht zu r, in Richtung des wachsenden ψ, die Hauptgeschwindigkeit in der Grenzschicht ist w.

Für die Geschwindigkeit W des Kernes, die wir, ebenso wie U, nur als Funktion von x, also in y-Richtung konstant, annehmen, setzen wir unter Anlehnung an Versuchsergebnisse eine lineare Verteilung, vom inneren zum äußeren Rand des Rohres ansteigend, an:

$$W = A + B x = A + B r \cos\psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

(A = Geschwindigkeit in der Rohrmitte $\approx$ mittlere Geschwindigkeit; $B = \operatorname{tg}\gamma$ = Neigung des linearen Geschwindigkeitsprofils).

Dieser Geschwindigkeit entspricht ein Druckanstieg durch Zentrifugalkraft (pro Längeneinheit):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho \frac{W^2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

(ϱ = Dichte). Der Krümmungsradius ist dabei groß gegen den Querschnittsradius angenommen. Mit $z = R\varphi$ erhält man daraus durch Integration: $p = \frac{\varrho}{R}\int W^2\,dx + Cz$ und mit Gl. (4)

$$p = \frac{\varrho}{R}\left(A^2 x + A B x^2 + \frac{B^2}{3} x^3\right) + C z = \frac{\varrho}{R}\left(A^2 r \cos\psi + A B r^2 \cos^2\psi + \frac{B^2}{3} r^3 \cos^3\psi\right) + C R \varphi \quad (6).$$

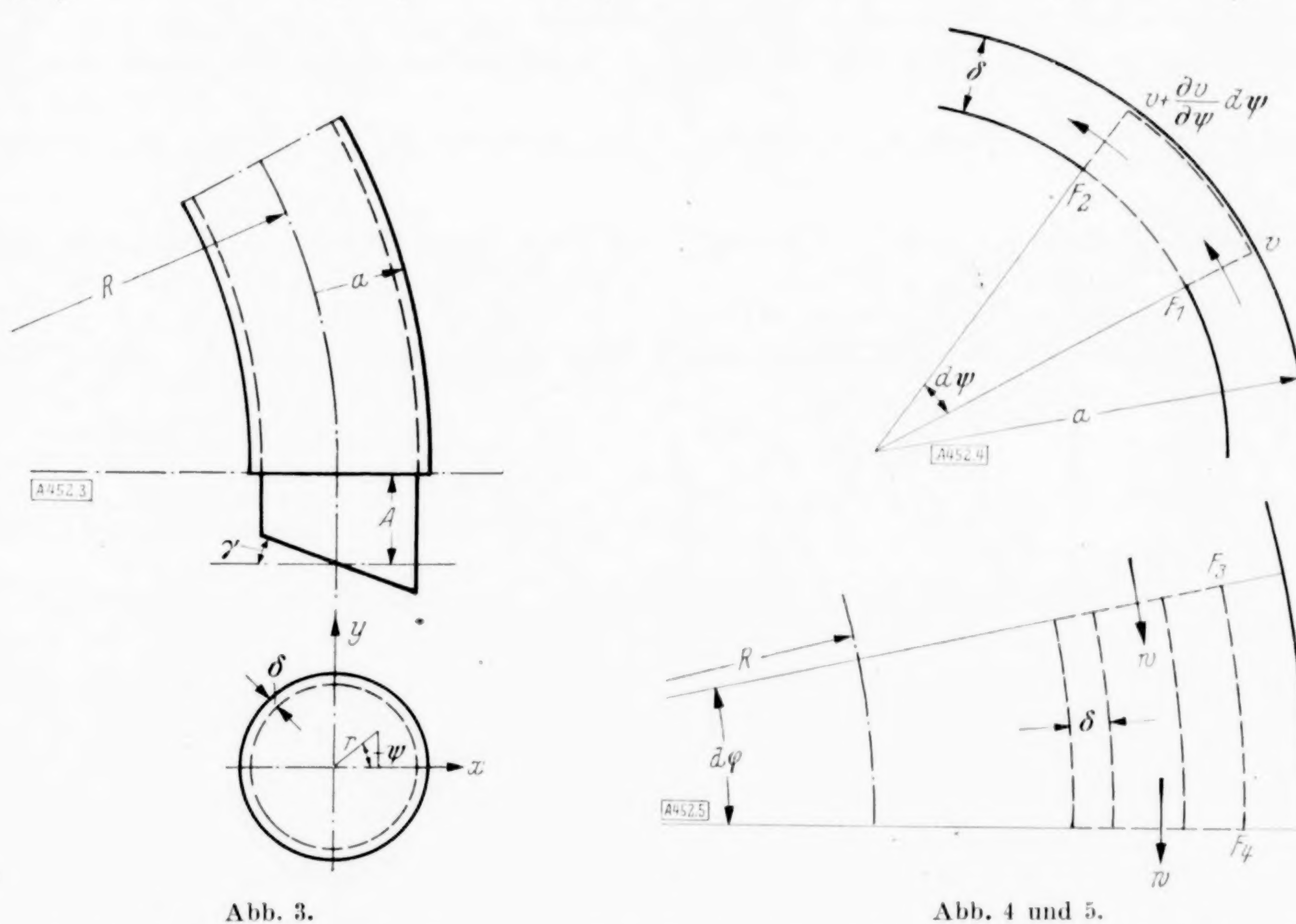


Abb. 3. Abb. 4 und 5.

Der Druckunterschied zwischen Innen- und Außenwand wirkt sich in der früher geschilderten Weise in einer Sekundärströmung aus, die in der Mitte nach außen, in der Nähe der Rohrwand nach innen verläuft. Diese Sekundärströmung findet bei nicht allzu schwachen Krümmungen hauptsächlich in der Grenzschicht statt. Für die weitere Rechnung nehmen wir an, daß die Rückströmung von außen nach innen, von der Mitte des Rohres in symmetrischer Weise nach beiden Seiten hin, nur in der Grenzschicht stattfindet. Von der Mitte der Innenwand aus, wo sich beide Teilströme wieder treffen, verläßt die Strömung die Grenzschicht und wandert strahlenförmig durch den Kern wieder nach außen, so daß am Rande der Grenzschicht dauernd Flüssigkeit in die Grenzschicht einmündet. Wir denken uns nun ein Element der Grenzschicht herausgeschnitten, das in Strömungsrichtung durch zwei Ebenen im Winkelabstand $d\varphi$ und senkrecht zur Strömungsrichtung durch zwei Ebenen im Winkelabstand $d\psi$ abgegrenzt ist. Abb. 4 und 5 zeigen das Element im Auf- und Grundriß. Auf dieses Element wenden wir den Impulssatz an. Nach diesem ist bei stationärer Strömung

der Impulsfluß durch die das Volumenelement abgrenzende Kontrollfläche gleich der Summe der auf die eingeschlossene Flüssigkeitsmasse wirkenden äußeren Kräfte. Wir wenden den Impulssatz zunächst auf die ψ-Richtung an (Abb. 4). Als neue Koordinate werde der Abstand ξ von der Rohrwand eingeführt, so daß

$$a - r = \xi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Der durch F_1 in der Zeiteinheit eintretende Impuls ist $\varrho R\, d\varphi \int_0^\delta v^2\, d\xi$, der durch F_2 austretende Impuls ist

$$\varrho R\, d\varphi \int_0^\delta \left(v + \frac{\partial v}{\partial \psi}\right)^2 d\xi = \varrho R\, d\varphi \int_0^\delta v^2\, d\xi + \varrho R\, d\varphi \int_0^\delta \left(\frac{\partial v^2}{\partial \psi}\, d\psi\right) d\xi.$$

Der Unterschied beträgt demnach: $\varrho R\, d\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int_0^\delta v^2\, d\xi\right) d\psi$. Der Überschuß der durch F_2 austretenden über die bei F_1 eintretende Flüssigkeitsmasse ist $\varrho R\, d\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int_0^\delta v\, d\xi\right) d\psi$. Aus Kontinuitätsgründen muß ebensoviel Flüssigkeit durch die Grenzfläche zwischen Grenzschicht und Kern in die Grenzschicht gelangen. Der damit eintretende ψ-Impuls ist, wenn U' die ψ-Komponente der Kernströmung ist und der Index δ den Rand der Grenzschicht, $\xi = \delta$, kennzeichnet: $\varrho R\, d\varphi\, U'_\delta \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int_0^\delta v\, d\xi\right) d\psi$. An äußeren Kräften kommen in Betracht: Die Reibung an der Rohrwand $-\tau_{\text{quer}}\, a R\, d\varphi\, d\psi = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} a R\, d\varphi\, d\psi$, der Unterschied der Druckkräfte auf die Flächen F_1 und F_2 $-\delta R\, d\varphi \frac{\partial p}{\partial \psi} d\psi$ und die ψ-Komponente der Zentrifugalkraft $-R\, d\varphi \int_0^\delta \left(\frac{\varrho w^2}{R}\, a\, d\psi \sin\psi\right) d\xi$. Die negativen Vorzeichen erklären sich dadurch, daß alle Kräfte entgegengesetzt zur ψ-Richtung wirken.

Der Impulssatz für die ψ-Richtung lautet also nach Kürzung mit $d\psi$ und $R\, d\varphi$ und Division durch ϱ:

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\int_0^\delta v^2\, d\xi - U'_\delta \frac{\partial}{\partial \psi}\int_0^\delta v\, d\xi = -\nu a \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_0 - \frac{\delta}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial \psi}\right)_\delta - \frac{a}{R}\sin\psi \int_0^\delta w^2\, d\xi \quad \ldots \ldots (8).$$

Innerhalb der Grenzschicht herrscht näherungsweise der Druck der angrenzenden Kernströmung. Man kann deshalb für p den Wert an der Stelle $r = a - \delta$ nach Gl. (6) einsetzen.

Nun wenden wir uns zum Impulssatz für die φ-Richtung: In Abb. 5 ist der Grundriß des betrachteten Elementes aufgezeichnet. Da sich w mit φ nicht ändert, liefert die durch die Flächen F_3 und F_4 fließende Flüssigkeitsmenge keinen Impulsbeitrag, wohl aber die an der Übergangsfläche von Kern und Grenzschicht eintretende Flüssigkeit im Betrag $-\varrho W_\delta R\, d\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int_0^\delta v\, d\xi\right) d\psi$ und die durch die Flächen F_1 und F_2 hindurchtretende Menge der Sekundärströmung im Betrag $\varrho R\, d\varphi \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\int_0^\delta v\, w\, d\xi\right) d\psi$. An äußeren Kräften sind hier anzusetzen: Die Reibung an der Rohrwand $-\tau_{\text{längs}}\, a\, d\psi\, R\, d\varphi = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} a\, d\psi\, R\, d\varphi$ und der Unterschied der Druckkräfte auf die Flächen F_3 und F_4 im Betrag $-\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)_\delta d\varphi\, \delta\, a\, d\psi$. Setzt man wieder den Gesamtüberschuß des aus dem Element austretenden Impulses über den eintretenden gleich der Summe der äußeren Kräfte, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\int_0^\delta v\, w\, d\xi - W_\delta \frac{\partial}{\partial \psi}\int_0^\delta v\, d\xi = -\nu a \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_0 - \frac{a\,\delta}{\varrho R}\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)_\delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Macht man jetzt für die Geschwindigkeitsprofile v und w geeignete Ansätze, die man in die Gl. (8) und (9) einführt, so hat man zwei Differentialgleichungen zur Verfügung, aus denen man die Grenzschichtdicke $\delta = \delta(\psi)$ sowie eine weitere in den Ansätzen für die Geschwindigkeitsprofile frei zu lassende Unbekannte bestimmen kann. Um die Rechnung nicht allzu schwierig zu gestalten, geben wir den Profilen die in Abb. 6 bezeichnete Form von Parabeln und lassen zu, daß bei v der Übergang von der Grenzschicht in die Kernströmung mit einem Knick stattfindet. Die Ansätze, die den Randbedingungen genügen müssen, daß die Geschwindigkeiten an der Rohrwand den Wert Null haben und am inneren Rand der Grenzschicht in die Randwerte der Kernströmung übergehen, lauten:

$$v = 4\,D\,\frac{\xi}{\delta}\left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

$$w = W_\delta\left[1 - \left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

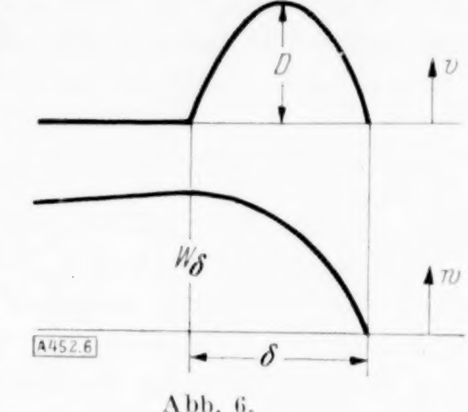


Abb. 6.

D ist die Geschwindigkeit der Sekundärströmung v im Abstand $\frac{\delta}{2}$ von der Rohrwand. Wir haben früher die Voraussetzung gemacht, daß innerhalb der Sekundärströmung die Rückströmung vom äußeren zum inneren Rand des Rohres nur in der Grenzschicht stattfindet. Legt man durch den Rohrquerschnitt, z. B. durch den Mittelpunkt, einen vertikalen Schnitt, so besagt die Kontinuitätsbedingung, daß die durch den Kern nach außen wandernde Menge genau so groß sein muß, wie die oben und unten in der Grenzschicht von außen nach innen fließende Menge, daß sie aber wegen des bedeutend größeren zur Verfügung stehenden Querschnittes eine entsprechend kleinere Geschwindigkeit besitzt, deren Rückwirkung auf die Grenzschicht wir vernachlässigen wollen. Das in Gl. (8) vorkommende Glied mit U' fällt deshalb fort.

Mit den Ansätzen (10) und (11) ersetzen wir die in (8) und (9) vorkommenden Glieder. Diese werden im einzelnen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\delta v\,d\xi = \frac{8}{15}\,\delta\,D^2; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)_0 = \frac{4\,D}{\delta}; \quad \int_0^\delta w^2\,d\xi = \frac{8}{15}\,\delta\,W_\delta^2;\\
&\int_0^\delta v\,w\,d\xi = \frac{7}{15}\,\delta\,D\,W_\delta; \quad \int_0^\delta v\,d\xi = \frac{2}{3}\,\delta\,D; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_0 = \frac{2\,W_\delta}{\delta}.\\
&\text{Außerdem ist nach Gl. (6):}\\
&\left(\frac{\partial p}{\partial \psi}\right)_\delta = -\frac{\varrho}{R}\,(a - \delta)\sin\psi\,W_\delta^2; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \psi}\right)_\delta = R\,C
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Durch Zusammenfassung der einzelnen Glieder erhält man unter Vernachlässigung von δ gegen a, so daß $a - \delta \approx a$, zwei simultane Differentialgleichungen für $\delta = \delta(\psi)$ und $D = D(\psi)$.

$$\delta\,\frac{\partial}{\partial \psi}(\delta\,D^2) + \frac{15}{2}\,\nu\,a\,D - \frac{7}{8}\,\delta^2\,\frac{a}{R}\sin\psi\,(A + B\,a\cos\psi)^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13),$$

$$\delta\,\frac{\partial}{\partial \psi}(\delta\,D)\,(A + B\,a\cos\psi) + \frac{7}{3}\,\delta^2\,D\,B\,a\sin\psi - 5\,\delta^2\,\frac{C\,a}{\varrho} - 10\,\nu\,a\,(A + B\,a\cos\psi) = 0 \quad (14).$$

Zur Lösung machen wir für die Unbekannten δ und D Reihenansätze. Wegen der vorkommenden Kreisfunktionen erscheint es zunächst zweckmäßig, Fourierreihen zu verwenden, aber wegen der zu bildenden Reihenprodukte, deren Koeffizienten hierbei selbst wieder unendliche Reihen werden, ist es vorteilhafter, Potenzreihen in ψ zu wählen. Die Betrachtung der Symmetrieeigenschaften der Strömung ergibt, daß die Grenzschichtdicke δ symmetrisch zur x-Achse ist, daß dagegen die Grenzschichtgeschwindigkeit D nach der negativen ψ-Richtung hin ihr Vorzeichen ändert, also unsymmetrisch zur x-Achse ist. Berücksichtigt man diese Eigenschaften, so hat man in der Potenzreihe für δ nur geradzahlige Potenzen von ψ, in der Reihe für D nur ungeradzahlige anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= \delta_0 + \delta_2\,\psi^2 + \delta_4\,\psi^4 + \ldots\\
D &= D_1\,\psi + D_3\,\psi^3 + D_5\,\psi^5 + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Die beiden Integrationskonstanten für die zwei Differentialgleichungen sind dann schon durch die in den Ansätzen erfüllten Bedingungen: $\psi = 0$: $\delta = \delta_0$, $D = 0$ erledigt. Auch die Kreisfunktionen ersetzen wir durch Potenzreihen:

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} \mp \ldots \qquad \cos \psi = 1 - \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} \mp \ldots$$

Mit diesen Reihen, die wir bei den geraden bis zur sechsten, bei den ungeraden bis zur siebenten Potenz führen, bilden wir die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ausdrücke und erhalten, nach Potenzen von ψ geordnet, aus Gl. (13):

$$\left.\begin{aligned}
&\psi \left[2\,\delta_0^2\, D_1^2 + \frac{15}{2}\,\nu\, a\, D_1 - \frac{7}{8}\,\frac{a}{R}\,\delta_0^2\,(A + B\,a)^2\right] \\
&+ \psi^3 \left[8\,\delta_0^2\, D_1\, D_3 + 6\,\delta_0\,\delta_4\, D_1^2 + \frac{15}{2}\,\nu\, a\, D_3 + \frac{7}{24}\,\delta_0^2\,\frac{a}{R}\left(\frac{A^2}{2} + 4\,a\,A\,B + \frac{7}{8}\,B^2\,a^2\right)\right. \\
&\qquad\left. - \frac{7}{4}\,\delta_0\,\delta_2\,\frac{a}{R}\,(A + B\,a)^2\right] \\
&+ \psi^5 \left[12\,\delta_0^2\, D_1\, D_5 + 6\,\delta_0^2\, D_3^2 + 20\,\delta_0\,\delta_2\, D_1\, D_3 + 8\,\delta_0\,\delta_4\, D_1^2 + 4\,\delta_2^2\, D_1^2 + \frac{15}{2}\,\nu\, a\, D_5\right. \\
&\qquad - \frac{7}{480}\,\frac{a}{R}\,\delta_0^2\left(\frac{A^2}{2} + 16\,a\,A\,B + \frac{61}{2}\,B^2\,a^2\right) - \frac{7}{8}\,\frac{a}{R}\,\delta_2^2\,(A + B\,a)^2 \\
&\qquad\left. + \frac{7}{12}\,\frac{a}{R}\,\delta_0\,\delta_2\left(\frac{A^2}{2} + 4\,a\,A\,B + \frac{7}{2}\,B^2\,a^2\right) - \frac{7}{4}\,\frac{a}{R}\,\delta_0\,\delta_4\,(A + B\,a)^2\right] \\
&+ \psi^7 \left[16\,\delta_0^2\, D_1\, D_7 + 16\,\delta_0^2\, D_3\, D_5 + 28\,\delta_0\,\delta_2\, D_1\, D_5 + 14\,\delta_0\,\delta_2\, D_3^2 + 24\,\delta_0\,\delta_4\, D_1\, D_3\right. \\
&\qquad + 10\,\delta_0\,\delta_6\, D_1^2 + 12\,\delta_2^2\, D_1\, D_3 + 10\,\delta_2\,\delta_4\, D_1^2 + \frac{15}{2}\,\nu\, a\, D_7 \\
&\qquad + \frac{1}{2880}\,\frac{a}{R}\,\delta_0^2\left(\frac{A^2}{2} + 64\,a\,A\,B + \frac{547}{2}\,B^2\,a^2\right) \\
&\qquad - \frac{7}{240}\,\frac{a}{R}\,\delta_0\,\delta_2\left(\frac{A^2}{2} + 16\,a\,A\,B + \frac{7}{2}\,B^2\,a^2\right) \\
&\qquad + \frac{7}{12}\,\frac{a}{R}\,\delta_0\,\delta_4\left(\frac{A^2}{2} + 4\,a\,A\,B + \frac{7}{2}\,B^2\,a^2\right) + \frac{7}{24}\,\frac{a}{R}\,\delta_2^2\left(\frac{A^2}{2} + 4\,a\,A\,B + \frac{7}{2}\,B^2\,a^2\right) \\
&\qquad\left. - \frac{7}{4}\,\frac{a}{R}\,\delta_0\,\delta_6\,(A + B\,a)^2 - \frac{7}{4}\,\frac{a}{R}\,\delta_2\,\delta_4\,(A + B\,a^2)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

und aus Gl. (14):

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\delta_0^2\, D_1\,(A + B\,a) - 5\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_0^2 - 10\,\nu\, a\,(A + B\,a)\right] \\
&+ \psi^2 \left[3\,\delta_0^2\, D_3\,(A + B\,a) + 4\,\delta_0\,\delta_2\, D_1\,(A + B\,a) + \frac{11}{6}\,\delta_0^2\, D_1\, B\,a - 10\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_0\,\delta_2 + 5\,\nu\, a\, B\,a\right] \\
&+ \psi^4 \left[5\,\delta_0^2\, D_5\,(A + B\,a) + 8\,\delta_0\,\delta_2\, D_3\,(A + B\,a) + 6\,\delta_0\,\delta_4\, D_1\,(A + B\,a)\right. \\
&\qquad + 3\,\delta_0^2\, D_1\,(A + B\,a) - \frac{25}{72}\,\delta_0^2\, D_1\, B\,a + \frac{5}{6}\,\delta_0^2\, D_3\, B\,a + \frac{8}{3}\,\delta_0\,\delta_2\, D_1\, B\,a \\
&\qquad\left. - 10\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_0\,\delta_4 - 5\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_2^2 - \frac{5}{12}\,\nu\, a\, B\,a\right] \\
&+ \psi^6 \left[7\,\delta_0^2\, D_7\,(A + B\,a) + 12\,\delta_0\,\delta_2\, D_5\,(A + B\,a) + 10\,\delta_0\,\delta_4\, D_3\,(A + B\,a) + 8\,\delta_0\,\delta_6\, D_1\,(A + B\,a)\right. \\
&\qquad + 5\,\delta_2^2\, D_3\,(A + B\,a) + 8\,\delta_2\,\delta_4\, D_1\,(A + B\,a) + \frac{13}{720}\,\delta_0^2\, D_1\, B\,a \\
&\qquad - \frac{19}{72}\,\delta_0^2\, D_3\, B\,a - \frac{11}{18}\,\delta_0\,\delta_2\, D_1\, B\,a - \frac{1}{6}\,\delta_0^2\, D_5\, B\,a + \frac{2}{3}\,\delta_0\,\delta_2\, D_3\, B\,a \\
&\qquad + \frac{5}{3}\,\delta_0\,\delta_4\, D_1\, B\,a + \frac{5}{6}\,\delta_2^2\, D_1\, B\,a - 10\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_0\,\delta_6 - 10\,\frac{C\,a}{\varrho}\,\delta_2\,\delta_4 \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{1}{72}\,\nu\, a\, B\,a\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (17).$$

Diese beiden Gleichungen sind nur dann identisch Null, wenn jeder Klammerausdruck Null wird. Diese Bedingung liefert für die 8 unbekannten Koeffizienten der Potenzreihenansätze 8 Bestimmungsgleichungen, von denen jeweils zwei unter sich lösbar sind. Der Klammerausdruck von ψ^0 und derjenige von ψ, beide gleich Null gesetzt, bilden zwei Gleichungen für δ_0 und D_1. Mit den daraus bekannten Lösungen bekommt man weitere zwei Gleichungen für δ_2 und D_3 durch Nullsetzen der Klammerausdrücke von ψ^2 und ψ^3 usw. Die jedesmal mit den vorausgehenden Lösungen versehenen Gleichungen sind, mit Ausnahme derjenigen für δ_0 und D_1, die quadratisch sind, linear.

Zur Vereinfachung führen wir noch folgende Beziehungen ein:

$$\frac{B\,a}{A+B\,a}=\beta\,; \qquad (A+B\,a)^2=-a^2\,\frac{C\,a}{\varrho}=a^2\,G^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Hierin bedeuten a und β dimensionslose Zahlen. G hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Das Minuszeichen erklärt sich daraus, daß C negativ ist, wie man sich durch Gl. (6) leicht überzeugen kann, da der Druck mit wachsendem φ abnimmt, und daß $(A+B\,a)^2$ eine positive Größe ist. a und β treten an Stelle der bisher gebrauchten Größen A und B. Der Zusammenhang ist gegeben durch:

$$A=a\,G\,(1-\beta)\,; \qquad B=a\,\beta\,\frac{G}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Mit diesen neuen Beziehungen lauten die dimensionslos gemachten Lösungen für die Potenzreihenkoeffizienten folgendermaßen:

$$\left(m=\text{Abkürzung für }\frac{a}{R}\,a^4\,; \qquad n=\text{Abkürzung für }\sqrt{\frac{7}{22}\,\frac{a}{R}\,a^4+\left(\frac{15}{22}\right)^2}\right)$$

$$\frac{\delta_0}{a}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{G\,a}{\nu}}}\sqrt{\frac{10\,a}{n+\dfrac{95}{22}}}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_0}=\frac{0{,}014583\,m-\beta\,(0{,}129040\,m+0{,}092803\,n+0{,}249225)}{0{,}355303\,m+2{,}643939\,n+0{,}552686}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta_4}{\delta_0}=\frac{1}{0{,}407273\,m+2{,}004545\,n-0{,}616736}\cdot\Bigg\{&\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2[0{,}152727\,m+3{,}737121\,n+5{,}743629]\\ &+\frac{\delta_2}{\delta_0}\,[0{,}029167\,m+\beta\,(0{,}454646\,m+4{,}337626\,n+1{,}084194)]\\ &-[0{,}000729\,m-\beta\,(0{,}009678\,m-0{,}052936\,n+0{,}051717)-\beta^2\,(0{,}146202\,m\\ &+0{,}283144\,n+0{,}275697)]\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta_6}{\delta_0}=\frac{1}{0{,}465909\,m+1{,}574675\,n-0{,}537928}\\ \cdot\Bigg\{&\frac{\delta_4}{\delta_0}\,[0{,}029167\,m+\beta\,(0{,}506263\,m+2{,}900144\,n+1{,}117867)]\\ &+\frac{\delta_2}{\delta_0}\,\frac{\delta_4}{\delta_0}\,[0{,}372879\,m+7{,}101948\,n+8{,}360144]-\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^3[0{,}285253\,m+4{,}705267\,n+6{,}240276]\\ &+\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2[0{,}014583\,m-\beta\,(0{,}227677\,m+4{,}531649+5{,}817646)]\\ &-\frac{\delta_2}{\delta_0}\,[0{,}001458\,m+\beta\,(0{,}078573\,m+0{,}604031\,n-0{,}115709)\\ &\qquad-\beta^2\,(0{,}183455\,m+2{,}018040\,n+0{,}953760)]\\ &+[0{,}000017\,m+\beta\,(0{,}000707\,m+0{,}003641\,n-0{,}005924)\\ &\qquad-\beta^2\,(0{,}038145\,m+0{,}022087\,n+0{,}051905)\\ &\qquad-\beta^3\,(0{,}049683\,m+0{,}126055\,n+0{,}097990)]\Bigg\}\,,\end{aligned}$$

$$\frac{D_1}{G} = \frac{1}{\alpha}\left(n - \frac{15}{22}\right)$$

$$\frac{D_3}{D_1} = -\frac{1}{n - \frac{15}{22}}\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2 (1{,}333333\, n + 2{,}424242) + \beta\,(0{,}777778 + 0{,}303030)\right]$$

$$\frac{D_5}{D_1} = \frac{1}{n - \frac{15}{22}}\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2 (1{,}533333\, n + 3{,}287879) - \frac{\delta_4}{\delta_0}(1{,}200000\, n + 1{,}181818)\right.$$

$$\left. + \frac{\delta_2}{\delta_0}\beta\,(0{,}933333\, n + 1{,}252525) + \beta\,(0{,}077778\, n - 0{,}011364) + \beta^2\,(0{,}129630\, n + 0{,}050505)\right]$$

$$\frac{D_7}{D_1} = -\frac{1}{n - \frac{15}{22}}\left[\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^3 (1{,}676190\, n + 3{,}904762) + \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2 \beta\,(n + 1{,}540404)\right.$$

$$- \frac{\delta_2}{\delta_0}\frac{\delta_4}{\delta_0}(2{,}819048\, n + 4{,}839827) + \frac{\delta_6}{\delta_0}(1{,}142857\, n + 0{,}649350)$$

$$+ \frac{\delta_2}{\delta_0}\left\{\beta\,(0{,}096296\, n + 0{,}131433) + \beta^2\,(0{,}125926\, n + 0{,}027898)\right\}$$

$$- \frac{\delta_4}{\delta_0}\beta\,(0{,}844444\, n + 0{,}567100) + \beta\,(0{,}002778\, n - 0{,}000902)$$

$$\left. + \beta^2\,(0{,}027469\, n + 0{,}011694) - \beta^3\,(0{,}003086\, n + 0{,}001203)\right].$$

Bei der Auflösung der quadratischen Gleichung für D_1 ist das positive Vorzeichen der Wurzel gültig, da nur dann D_1 für $\frac{a}{R} = 0$, d. h. für den Fall des geraden Rohres, wo keine Sekundärströmung auftritt, gleich Null wird.

Um sich über die Konvergenz, die zur praktischen Verwertung der Rechnung bis $\varphi = \pi$ erwünscht ist, Aufschluß zu verschaffen, ist es zweckmäßig, den Verkauf von δ und D in ihren jeweils um ein Glied vergrößerten Teilsummen für einen bestimmten Fall graphisch aufzutragen. Da α und β vorläufig noch unbekannt sind, setzen wir dafür die dem Zahlenbeispiel entsprechenden Versuchswerte ein. Wir nehmen folgenden Fall aus den später zu erörternden Versuchen vorweg:

$$a = 0{,}5 \text{ cm}, \qquad \frac{a}{R} = \frac{1}{100},$$

$$C = \frac{\partial p}{R\,\partial\varphi} = 0{,}464 \cdot 10^{-4} \text{ kg/cm}^3 = 23{,}2 \text{ mm W.-S. auf } 50 \text{ cm Rohrlänge},$$

A = mittlere Durchflußgeschwindigkeit $\bar{c} = 47{,}04$ cm/s, $\nu = 0{,}01265$ cm²/s.

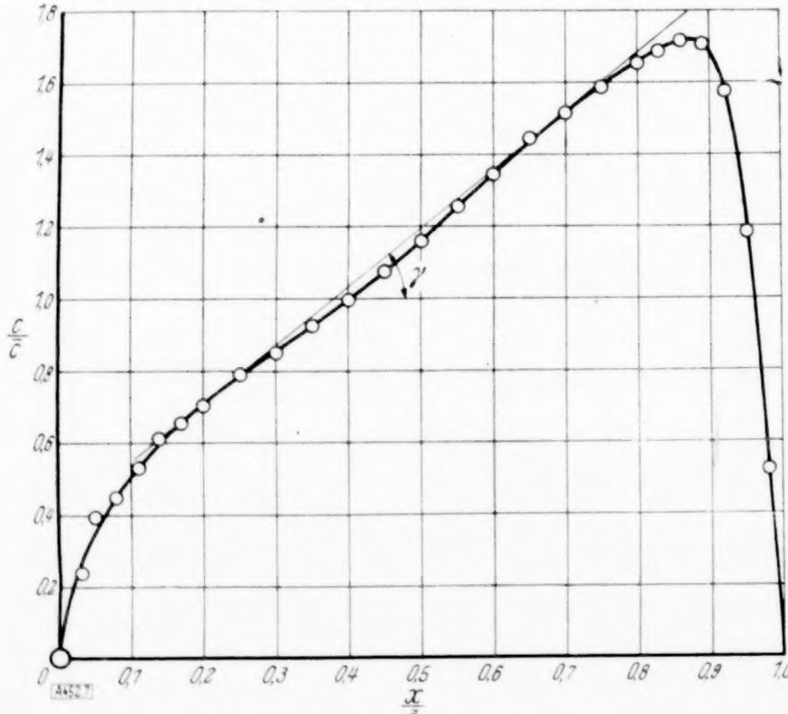


Abb. 7. Ermittlung der mittleren Neigung des Geschwindigkeitsprofils.

Aus dem über dem horizontalen Durchmesser des Austrittsquerschnittes gemessenen Geschwindigkeitsprofil (Abb. 7) entnimmt man die mittlere Neigung $B = \operatorname{tg}\gamma = 76{,}28$ 1/s.

$$\alpha = 17{,}84, \quad \beta = 0{,}448.$$

Mit diesen Werten errechnet man:

$$\delta_0 = 0{,}1029 \text{ cm} \qquad D_1 = 4{,}6261 \text{ cm/s}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_0} = -0{,}109733 \qquad \frac{D_3}{D_1} = -0{,}202571$$

$$\frac{\delta_4}{\delta_0} = 0{,}015680 \qquad \frac{D_5}{D_1} = 0{,}013150$$

$$\frac{\delta_6}{\delta_0} = -0{,}000364 \qquad \frac{D_7}{D_1} = -0{,}000800.$$

In Abb. 8 und 9 sind die einzelnen Näherungskurven, durch Division mit δ_0 bzw. D_1 dimensionslos gemacht, aufgetragen. Man sieht, daß die bisher berechneten Glieder der Potenzreihen nicht ganz ausreichen, um mit ihnen ein genaues Resultat bis $\psi = \pi$ zu erzielen. Wegen der alternierenden Vorzeichen der Reihenglieder weiß man aber, daß die folgende Näherung zwischen die beiden vorausgehenden zu liegen kommt, so daß man einen der Wirklichkeit angenäherten Verlauf einzeichnen kann. Bei dem Verlauf von D muß man außerdem berücksichtigen, daß der analytische Verlauf der Kurve bei $\psi = \pi$ nicht, wie bei $\psi = 0$, durch Null geht, wie man auf Grund der Überlegung, daß beim Zusammentreffen der beiden Teilströme eine Umlenkung in horizontaler Richtung stattfindet, annehmen könnte. Man hat sich vielmehr die analytische Fortsetzung der Lösung unserer Differentialgleichungen (13) und (14) so zu denken, daß sich beide Grenzschichtströme bei $\psi = \pi$ überkreuzen und mit endlicher Geschwindigkeit in der gleichen Richtung, in der sie ankommen, weiterfließen, wobei sie unter dem ansteigenden Druck eine Verzögerung erfahren, bis schließlich eine Umkehr und eine Ablösung von der Wand eintreten würde.

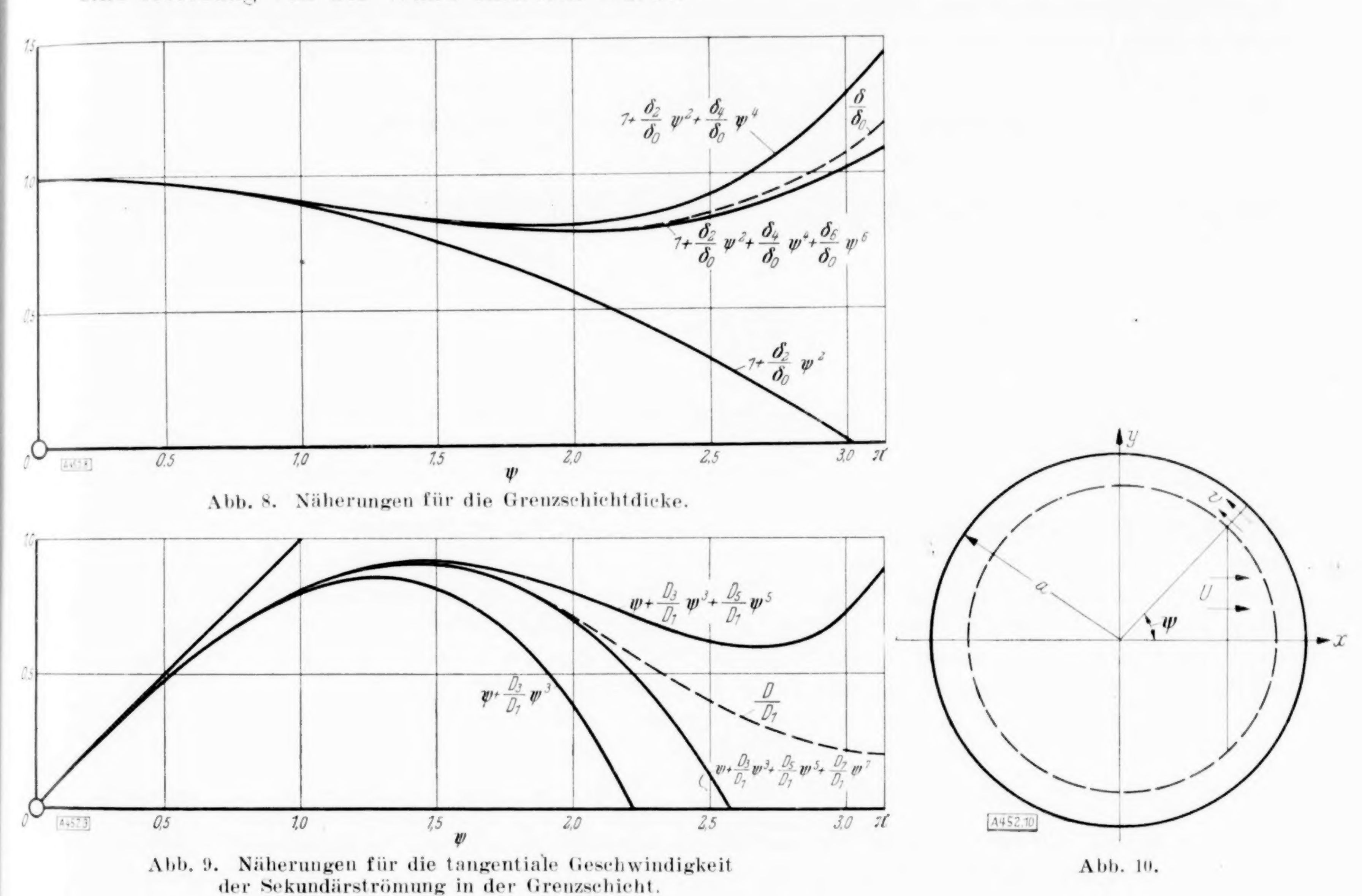


Abb. 8. Näherungen für die Grenzschichtdicke.

Abb. 9. Näherungen für die tangentiale Geschwindigkeit der Sekundärströmung in der Grenzschicht.

Abb. 10.

Der zur Berechnung der noch unbekannten Werte α und β einzuschlagende Weg ist folgender: Zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung innerhalb der Sekundärströmung muß, wie man aus Abb. 10 leicht ersehen kann, die Gleichung gelten:

$$U(a-\delta)\sin\psi = \int_a^\delta v\, d\xi = \frac{2}{3}\,\delta\, D.$$

Daraus:

$$U = \frac{2}{3}\,\frac{\delta\, D}{(a-\delta)\sin\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Hierin entspricht einem Wert ψ ein Wert für U an der Stelle $x=(a-\delta)\sin\psi$. Die im reibungslos vorausgesetzten Kern gültige Eulersche Gleichung liefert, wenn man berücksichtigt, daß nach Voraussetzung $\frac{\partial W}{\partial y}=0$ und daß $\frac{U\, W}{R}$ als klein niedrigerer Größenordnung vernachlässigbar ist, die Beziehung:

$$U\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{C}{\varrho}.$$

Daraus:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A + Bx) = B = -\frac{C}{\varrho U}$$

und mit Gl. (20):

$$\left.\begin{aligned} B &= \left| -\frac{3}{2}\frac{C a}{\varrho}\sin\psi\frac{1}{\delta D}\right|_{\text{mittel}} \\ &= \left| -\frac{3}{2}\frac{C a}{\varrho}\frac{1}{\delta_0 D_1}\frac{\psi - \frac{\psi^3}{3!} \pm \cdots}{\psi + \left(\frac{D_3}{D_1} + \frac{\delta_2}{\delta_0}\right)\psi^3 + \cdots}\right|_{\text{mittel}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

Eine weitere Beziehung gewinnt man, wenn man für ein Flüssigkeitselement, welches durch die Rohrwand und zwei Rohrquerschnitte im Abstand $R\,d\varphi$ begrenzt ist, das Gleichgewicht der Kräfte anschreibt. Die Reibungskräfte an der Rohrwand und die Druckkräfte auf die beiden Querschnittsflächen müssen im Gleichgewicht stehen. Diese Bedingung ergibt:

$$2\,R\,d\varphi\,a\int_0^\pi \tau_0\,d\psi = 2\int_0^a\int_0^\pi\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial\varphi}d\varphi\right)\right]r\,dr\,d\psi\,.$$

Daraus wird mit $\tau_0 =$ Reibung an der Rohrwand $= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_0 = 2\,\mu\,\frac{W_\delta}{\delta}$ und $\frac{\partial p}{\partial\varphi}d\varphi = C\,R\,d\varphi$ (nach Gl. (6)):

$$\int_0^\pi \frac{W_\delta}{\delta}\,d\psi = \int_0^\pi\frac{A}{\delta}\,d\psi + \int_0^\pi\frac{B(a-\delta)}{\delta}\cos\psi\,d\psi = -\frac{C a\pi}{4\mu} = \frac{G^2\pi}{4\nu} \quad \ldots\ldots (22).$$

Ersetzt man in Gl. (21) und (22) mit den Beziehungen (18) A und B durch α und β, so stehen zwei Gleichungen zur Verfügung, die prinzipiell zur Ermittlung von α und β genügen. Praktisch treten dabei aber sehr große Schwierigkeiten auf, weil beide Unbekannte in den Koeffizienten der für δ und D einzusetzenden Potenzreihen in sehr verwickelter Weise auftreten. Will man das Hauptziel vorliegender Rechnung, nämlich die Bestimmung eines Widerstandsgesetzes, erreichen, so ist allerdings die Ermittlung von α und β sehr wichtig, weil nur daraus der Zusammenhang zwischen der Reynoldsschen Zahl und der Rohrkrümmung einerseits und dem Druckabfall andererseits gewonnen werden kann. Um den Zusammenhang wenigstens angenähert zu bestimmen, wollen wir einige Vereinfachungen vornehmen, die es ermöglichen werden, eine asymptotische Gesetzmäßigkeit zu erhalten.

Für kleine Winkel ψ kann man Gl. (21) ersetzen durch

$$B = \frac{3}{2}\frac{G^2}{\delta_0 D_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Dieser Wert ist natürlich nicht für das ganze Intervall von 0 bis π zutreffend. Aus dem gemessenen Geschwindigkeitsprofil (Abb. 7) erkennt man aber, daß sich die Neigung des Profils nicht sehr stark ändert. Der Fehler, den man begeht, wenn man den Wert für B bei kleinen Winkeln als Mittelwert für das ganze Intervall nimmt, wird also nicht allzu groß werden. Auch Gl. (22) schreiben wir für kleine ψ an, oder, was das gleiche bedeutet, wir nehmen δ_0 als Mittelwert für δ zwischen 0 und π:

$$\frac{A}{\delta_0}\int_0^\pi d\psi + \frac{B a}{\delta_0}\int_0^\pi\cos\psi\,d\psi = \frac{G^2\pi}{4\nu} \quad \text{und daraus:} \quad A = \frac{G^2\delta_0}{4\nu} \quad \ldots\ldots (24).$$

Den dabei begangenen Fehler kann man aus Abb. 8, in der der richtige Verlauf von δ aufgetragen ist, ersehen. Nun nehmen wir noch bei den Ausdrücken für δ_0 und D_1 eine Vereinfachung vor, indem wir berücksichtigen, daß α^4 sehr groß ist (nach den Versuchen von der Größenordnung 10^5) und setzen angenähert:

$$\frac{\delta_0}{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{G a}{\nu}}}\sqrt{\frac{10\,\alpha}{\sqrt{\frac{7}{22}\frac{a}{R}\alpha^4 + \left(\frac{15}{22}\right)^2} + \frac{95}{22}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{G a}{\nu}}}\sqrt{\frac{10\,\alpha}{\sqrt{\frac{7}{22}\frac{a}{R}\alpha^4}}} = \frac{4{,}21}{\sqrt{\frac{G a}{\nu}}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\frac{a}{R}}}$$

$$\frac{D_1}{G} = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{7}{22}\frac{a}{R}\alpha^4 + \left(\frac{15}{22}\right)^2} - \frac{15}{22} \approx \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{7}{22}\frac{a}{R}\alpha^4} = 0{,}564\,\alpha\sqrt{\frac{a}{R}}\right).$$

Mit diesen Ausdrücken und den Beziehungen (18) und (19) wird aus Gl. (23) und (24) nach einfachen Zwischenrechnungen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{A + B\,a}{G} = 1{,}415 \frac{\sqrt[3]{\dfrac{G\,a}{\nu}}}{\sqrt[6]{\dfrac{a}{R}}} \qquad \beta = \frac{B\,a}{A + B\,a} = 0{,}375 \\ &A = 0{,}884\, a \left(\frac{a}{R}\right)^{-1/6} \left(\frac{\partial p}{R\,\partial\varphi}\right)^{2/3} \varrho^{-2/3}\, \nu^{-1/3} \\ &B = 0{,}531 \left(\frac{a}{R}\right)^{-1/6} \left(\frac{\partial p}{R\,\partial\varphi}\right)^{2/3} \varrho^{-2/3}\, \nu^{-1/3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (25).$$

Widerstandsgesetz: Damit ist man in der Lage, das Widerstandsgesetz zu berechnen. Nach Dimensionsbetrachtungen ist die Widerstandszahl

$$\lambda = \frac{\partial p}{R\,\partial\varphi}\, \varrho\, \frac{d}{\dfrac{c^2}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots (26)$$

(Druckgefälle bezogen auf den Staudruck der mittleren Durchflußgeschwindigkeit). In diese Gleichung hat man als mittlere Durchflußgeschwindigkeit den für A errechneten Wert aus Gl. (25) einzusetzen und erhält damit:

$$\lambda = 5{,}12\, a^{-1} \left(\frac{a}{R}\right)^{1/3} \left(\frac{\partial p}{R\,\partial\varphi}\right)^{-1/3} \varrho^{1/3}\, \nu^{2/3} \quad \ldots \ldots \ldots (27).$$

Mit $\mathrm{Re} = \frac{A\,d}{\nu}$ wird daraus

$$\lambda = 6{,}81 \left(\frac{a}{R}\right)^{1/4} \mathrm{Re}^{-1/2} \quad \ldots \ldots \ldots (28).$$

Bezieht man die Widerstandszahl λ auf die mit dem gleichen Druckgefälle erzielte Widerstandszahl $\lambda_0 = \frac{64}{\frac{c\,d}{\nu}}$ des geraden Rohres, so erhält man:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 0{,}1064 \left[\mathrm{Re} \left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}\right]^{1/2} \quad \ldots \ldots \ldots (29).$$

Man erkennt, daß das Ergebnis vorliegender Theorie ebenfalls den bei der Deanschen Rechnung vorkommenden Parameter $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$ enthält. Wieweit die auf Grund vereinfachender Annahmen gewonnene Beziehung (29) mit den Experimenten im Einklang steht, wird im Zusammenhang mit den Messungen im nächsten Kapitel gezeigt werden.

Es wurde versucht, Punkte der Widerstandskurve in zweiter Näherung dadurch zu berechnen, daß man mit den Gl. (21) und (22) für spezielle Zahlenbeispiele die entsprechenden Versuchswerte A und B durch ein graphisches Iterationsverfahren verbesserte. Das Verfahren hat sich jedoch nicht als konvergent erwiesen.

II. Experimenteller Teil.

1. Die Versuchseinrichtung. Die Anordnung der Versuchseinrichtung ist aus Abb. 11 zu ersehen. Das Versuchsrohr a ist mit einem Flansch an den Wasserbehälter b angeschlossen. Zur Vermeidung von Störungen sind die Einlaufenden der Versuchsrohre abgerundet. Von den beiden anderen Anschlußstellen des Behälters ist die eine (c) mit einem Überlauf e verbunden, der für einen gleichbleibenden Wasserspiegel sorgt, die andere (d) mit einer Wasserstandsröhre k, an der die Höhe des Wasserspiegels beobachtet werden kann. Die Zuleitung des Wassers erfolgt in f von der Wasserleitung aus.

Die Rohre, an denen die Messungen vorgenommen wurden, sind gezogene Messingrohre mit einem inneren Durchmesser von 1 cm. Das Biegen der Rohre wurde mit einer Walze vorgenommen. Um dabei eine Veränderung des kreisrunden Querschnittes zu verhindern, wurden die Rohre vor dem Biegen mit feinem Sand gefüllt. Es wurden 3 verschiedene Krümmungen untersucht, und zwar $\frac{a}{R} = \frac{1}{50}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}$.

Zur Messung von Druckunterschieden wurde ein gewöhnliches Flüssigkeitsmanometer und ein Mikromanometer der in Abb. 11 sichtbaren Bauart[14]) verwendet, welches gestattet, Drucke zwischen 0,02 und 50 mm W.-S. zu messen.

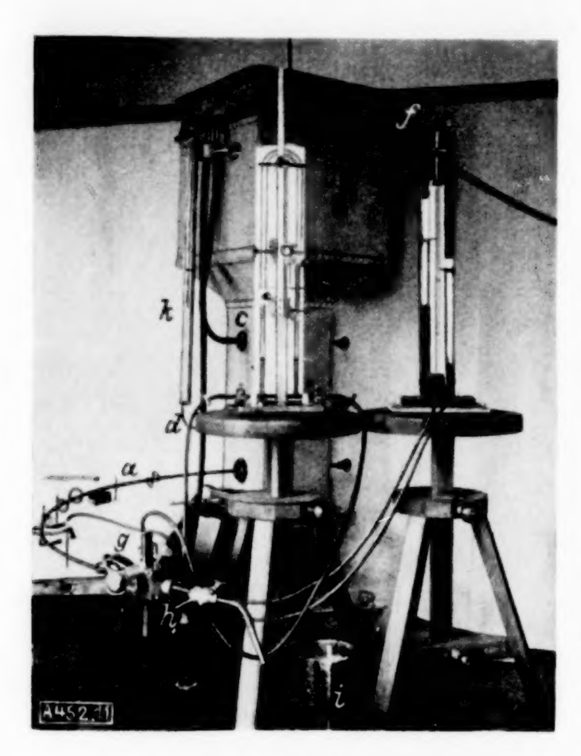


Abb. 11. Versuchseinrichtung.

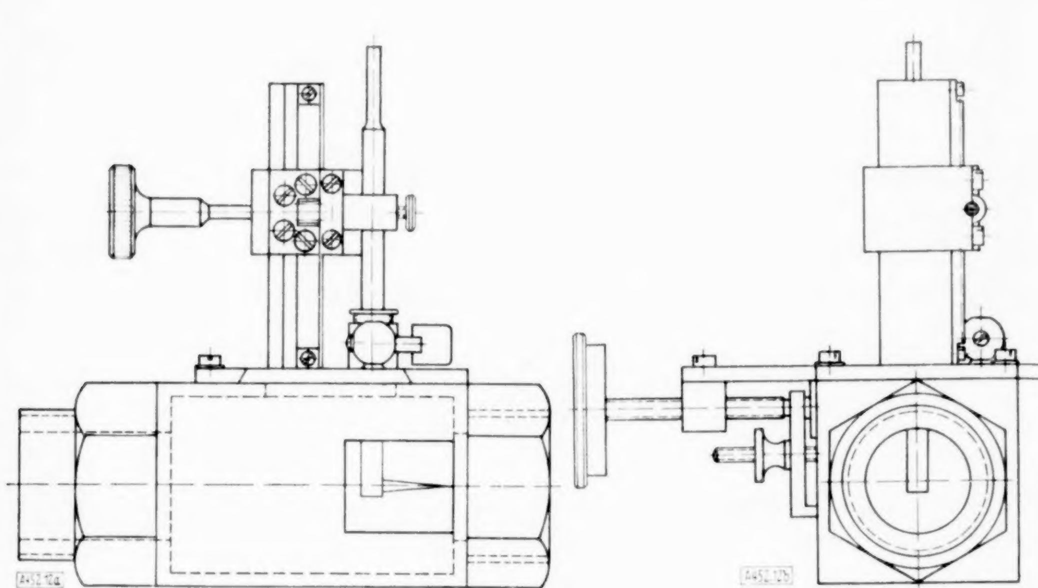


Abb. 12. Geschwindigkeitsmeßapparat.

Am Austrittsende des Versuchsrohres ist ein Gewindestück befestigt, mit dem das Rohr an den Geschwindigkeitsmeßapparat g angeschlossen ist. Die Konstruktion dieses Apparates ist aus Abb. 12 näher zu ersehen. Er trägt ein Pitotrohr aus Messing mit einer Öffnung von 0,402 mm Ø, dessen Ende unmittelbar vor dem Austrittsquerschnitt des Rohres in einer vertikalen Ebene vorbeigeführt werden kann. Die Entfernung betrug 0,2 mm. Um die Geschwindigkeit an jedem Punkt der Ausflußmündung messen zu können, ist das Pitotrohr in horizontaler Richtung auf einem gut dichtenden Schlitten durch eine Schraube zu verschieben, in vertikaler Richtung durch ein Ritzel mit Zahnstange. Die Einführung des Pitotrohres durch den Schlitten in das Meßgehäuse ist durch eine Stopfbüchse gegen Wasserdurchtritt abgedichtet. Durch ein kleines Ventil kann man die im Gehäuse befindliche Luft entweichen lassen. Die Durchflußmenge ist durch einen hinter dem Geschwindigkeitsmeßapparat angebrachten Hahn h regulierbar und wird in einem Meßzylinder i mit geeichtem Wasserstandsglas gemessen.

2. Die Messungen. a) Geschwindigkeitsverteilung. Die Geschwindigkeiten wurden aus Staudruckmessungen mit Hilfe der Gleichung

$$c = \sqrt{2\,g\,h} = 44{,}3\,\sqrt{h}\ [\mathrm{cm/s}]$$

ermittelt, wobei $g = 9{,}81$ m/s die Erdbeschleunigung und h den am Manometer als Differenz zwischen Gesamtdruck und statischem Druck in cm W.-S. abgelesenen Staudruck bedeuten. Der statische Druck wurde durch eine Anbohrung in der Ebene des Ausflußquerschnittes neben dem ausfließenden Strahl gemessen. Nach den Ermittlungen, die Nikuradse[14]) bei seinen Versuchen an geraden Rohren angestellt hat, sind infolge der außerhalb des Strahles liegenden Anbohrung keine Abweichungen zu bemerken. Um ein Bild der Geschwindigkeits-

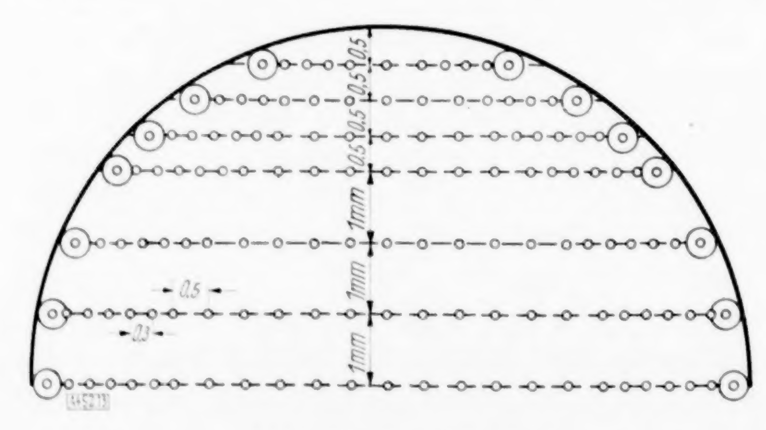


Abb. 13. Versuchsplan.

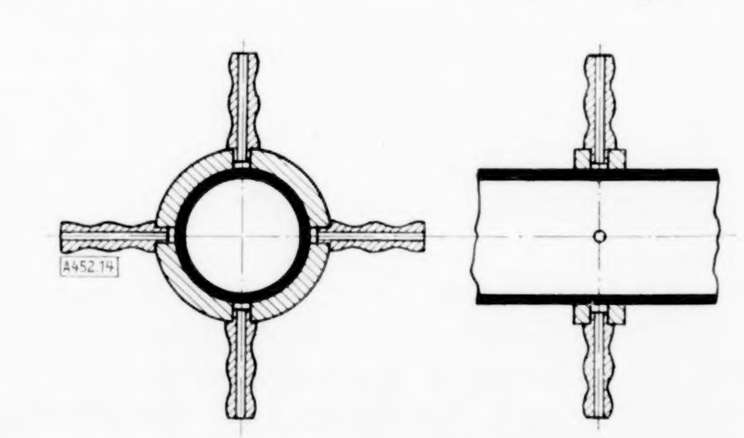


Abb. 14. Druckanbohrungen.

[14]) Genaue Beschreibung in J. Nikuradse: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Nr. 356 (1932).

verteilung über dem Querschnitt zu erhalten, muß man an möglichst vielen Punkten die Geschwindigkeit messen. Bei gekrümmten Rohren kann man sich wegen der Symmetrie der Strömung ober- und unterhalb des horizontalen Durchmessers des Querschnittes auf Messungen in einer der beiden Hälften beschränken. Die Geschwindigkeitsmessungen wurden nach dem in Abb. 13 dargestellten Versuchsplan vorgenommen. Wegen des steilen Geschwindigkeitsanstieges an den Rohrwänden, besonders an der Außenwand, sind die Meßpunkte dort dichter gelegt. Die der Rohrwand am nächsten liegenden Meßpunkte sind dadurch bestimmt, daß die Pitotrohröffnung gerade noch vollkommen im Flüssigkeitsstrahl liegt. Die Entfernung des Meßquerschnittes vom Rohreinlauf war an allen Rohren genügend groß, so daß die Messungen außerhalb der Anlaufstrecke in der voll ausgebildeten Strömung vorgenommen wurden.

b) Druckabfall. Der Druckabfall wurde durch Anbohrungen der Rohrwand gemessen. In einem Meßquerschnitt sind 4 Anbohrungen angebracht (Abb. 14), von denen jede mit einer Schlauchtülle versehen ist. Der Druckunterschied zwischen Innen- und Außenseite des Rohres kann gemessen werden, indem man die beiden horizontal liegenden Tüllen eines Meßquerschnittes mit einem Differentialmanometer verbindet. Bei der Messung des Druckgefälles längs einer Rohrstrecke wurden zum Druckausgleich die 4 Anbohrungen einer Meßstelle durch Schlauchstücke und Glasrohrgabeln in Verbindung gebracht, so daß im Manometer die Differenz der mittleren Querschnittsdrucke gemessen wurde.

c) Menge und Temperatur. Die sekundliche Durchflußmenge wurde durch Meßzylinder und Stoppuhr ermittelt. Da sich die Zähigkeit des Wassers sehr stark mit der Temperatur ändert, mußten genaue Temperaturmessungen vorgenommen werden. Auf dem benutzten Thermometer war die Temperatur in $^1/_{10}$ Grad ablesbar. Bei der Messung der Geschwindigkeitsverteilung mußte jede mit einer bestimmten sekundlichen Durchflußmenge laufende Versuchsreihe bei konstanter Reynoldsscher Zahl durchgeführt werden. Es war deshalb erforderlich, daß sich die Temperatur des Wassers während dieser Zeit nicht wesentlich änderte. Es wurden höchstens Änderungen von 0,2° C zugelassen.

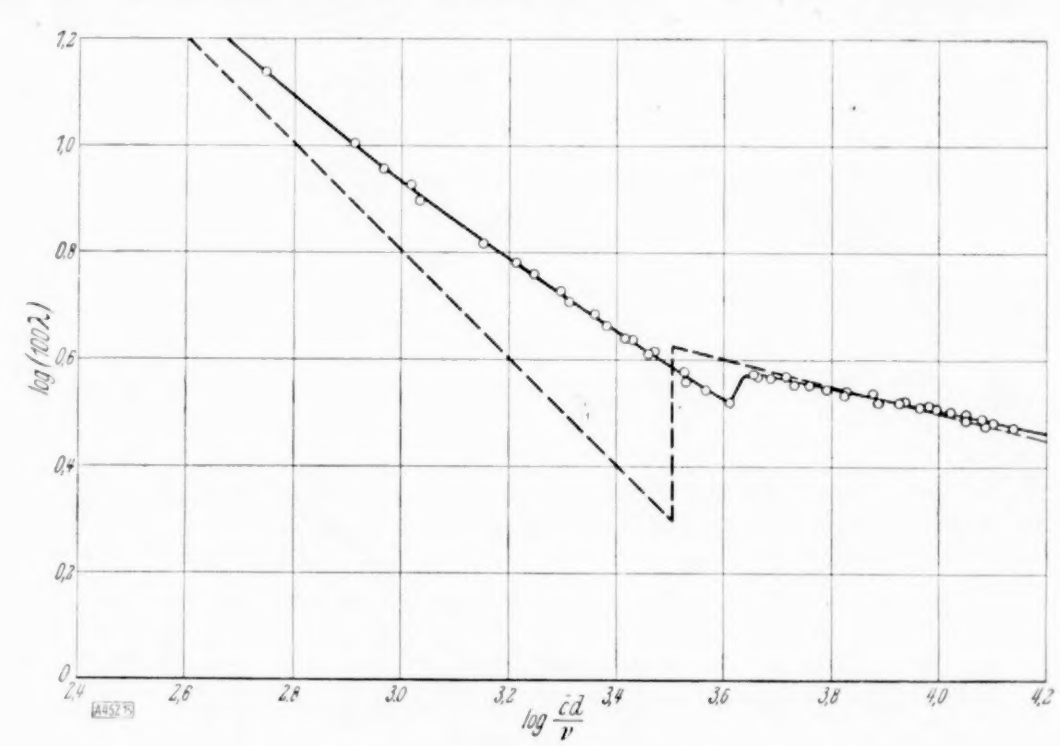


Abb. 15. log (100 λ) in Abhängigkeit von log Re für $\frac{a}{R} = \frac{1}{200}$.

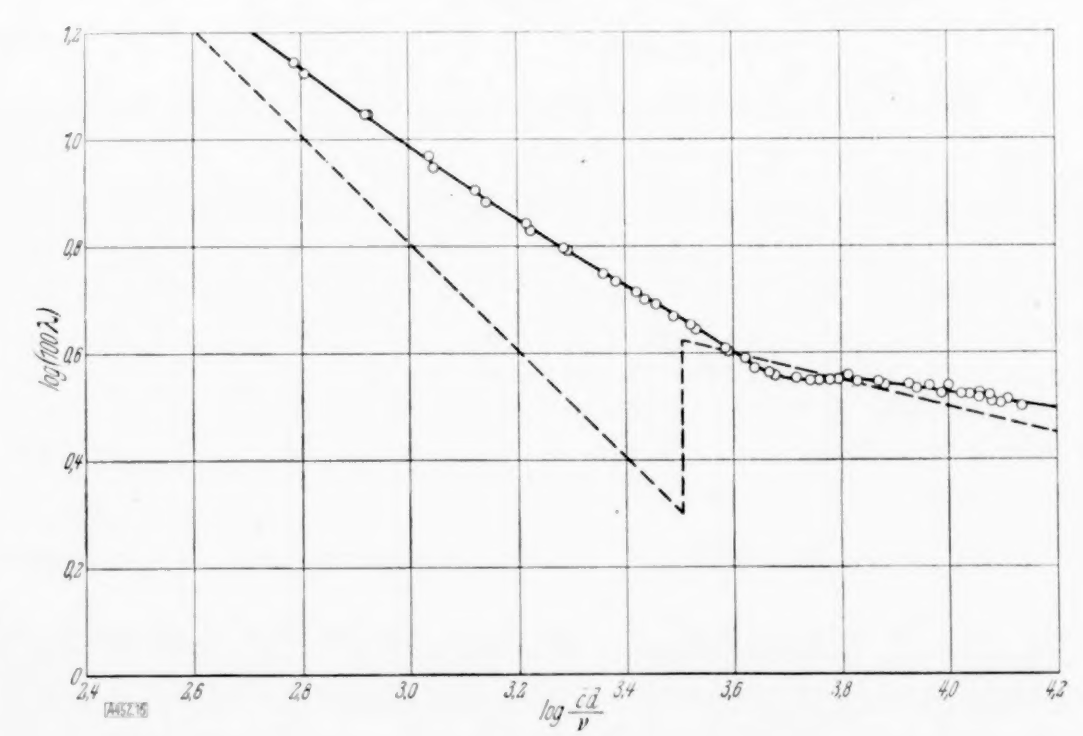


Abb. 16. log (100 λ) in Abhängigkeit von log Re für $\frac{a}{R} = \frac{1}{100}$.

3. Auswertung der Versuche. a) Das Widerstandsgesetz. In den Abb. 15, 16 und 17 ist die Abhängigkeit der Widerstandszahl $\lambda = \frac{\partial p}{R\,\partial \varphi}\frac{d}{q}$ von der Reynoldsschen Zahl für 3 verschiedene Krümmungen im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Die Messungen sind bis in das turbulente Gebiet ausgedehnt. Zum Vergleich ist auch das für das gerade Rohr im laminaren Gebiet gültige Widerstandsgesetz $\lambda_0 = \frac{64}{\mathrm{Re}}$ (Gerade mit der Neigung 1:1) sowie die im turbulenten Gebiet im Bereich unserer Messungen gültige Blasiussche Formel $\lambda_B = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$

(Gerade mit der Neigung 1:4) eingetragen. Die Widerstandskurve bei laminarer Strömung liegt überall höher als beim geraden Rohr, und zwar um so höher, je stärker das Rohr gekrümmt ist. Mit sinkender Reynoldsscher Zahl nähert sich die Widerstandskurve derjenigen des geraden Rohres, was dadurch bedingt ist, daß die Sekundärbewegung bei kleinen Geschwindigkeiten weniger widerstandserhöhend wirkt, weil die Wasserteilchen einen größeren Winkelabstand in Richtung der Rohrachse benötigen, um eine geschlossene Sekundärstromlinie zu durchlaufen, oder weil innerhalb eines gegebenen Winkelabstandes die Anzahl der „Schraubengänge" geringer ist.

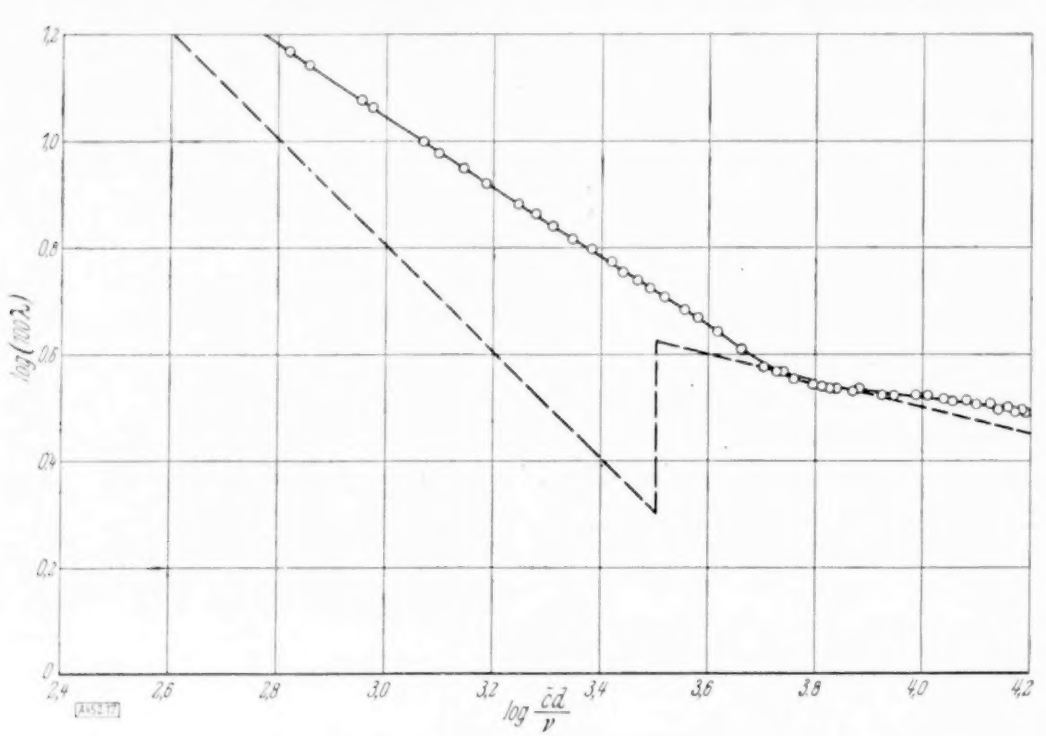


Abb. 17. log (100 λ) in Abhängigkeit von log Re für $\frac{a}{R} = \frac{1}{50}$.

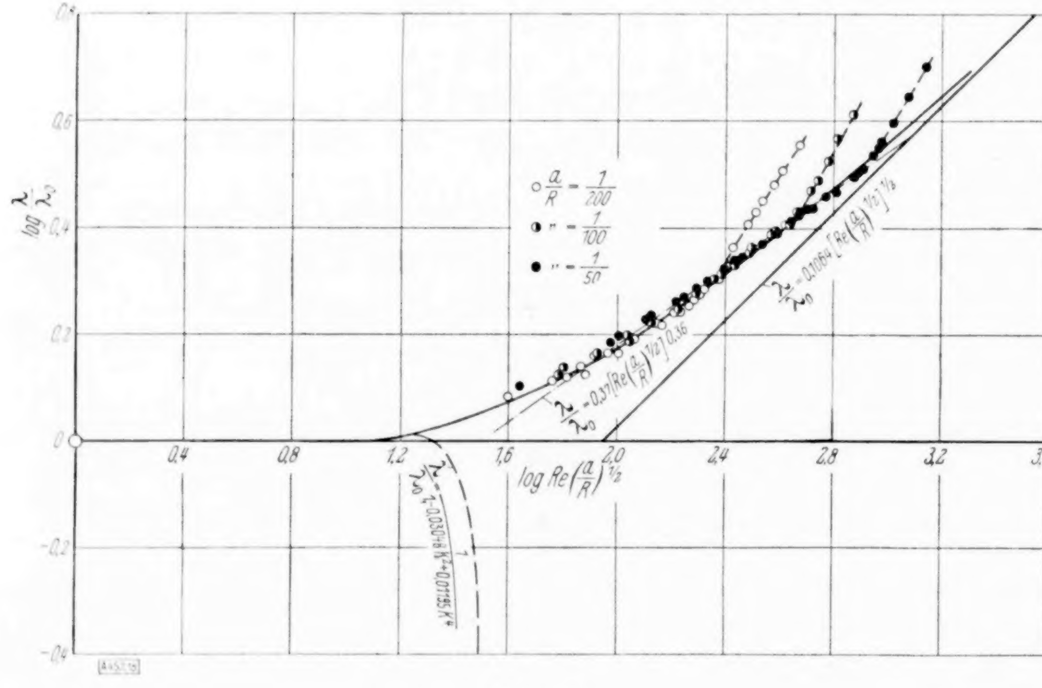


Abb. 18.

Eine weitere Erscheinung ist die Erhöhung der kritischen Reynoldsschen Zahl. Der Übergang in die Turbulenz findet um so später statt, je stärker die Krümmung ist. Diese stabilisierende Wirkung der Krümmung wurde auch in der früher erwähnten Arbeit von White festgestellt. Bei gut abgerundetem Einlauf und guter Beruhigung des Wassers, die dadurch gewährleistet war, daß das Wasser über ein Sieb in den Behälter gelangte, wurden folgende kritische Reynoldssche Zahlen beobachtet:

$\frac{a}{R}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$
Re_{kr}	5620	4730	3980

Die beim geraden Rohr besonders auffallende plötzliche Widerstandserhöhung beim Eintritt der Turbulenz wird mit zunehmender Krümmung immer mehr ausgeglichen, so daß allmählich ein stetiger Übergang in die turbulente Widerstandskurve stattfindet. Das kommt daher, daß der Widerstandsunterschied gegenüber dem geraden Rohr im laminaren Bereich wesentlich größer ist als im turbulenten und daß das bei zunehmender Krümmung erfolgende Anwachsen des Widerstandes bei laminarer Strömung rascher erfolgt als bei Turbulenz, bei der die Widerstandskurve nicht sehr beträchtlich von derjenigen des geraden Rohres abweicht. Diese Erscheinung mag gleichbedeutend sein mit einem von Millikan[16]) erzielten Ergebnis. Der in seiner Arbeit durch näherungsweise Integration der Kármánschen Differentialgleichung der Grenzschicht errechnete Reibungswiderstand für eine gekrümmte Oberfläche ist im laminaren Gebiet um 28 %, im turbulenten Gebiet nur um 7 % höher als die entsprechenden Reibungswiderstände der Platte.

In Abb. 18 sind die Widerstandsmessungen, und zwar die Werte $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ in Abhängigkeit von dem Parameter $Re\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$ im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Die Meßpunkte im laminaren Gebiet ordnen sich wie bei White für alle Krümmungen längs einer einzigen Kurve

[16]) C. B. Millikan: The Boundary Layer and Skin Friction for a Figure of Revolution. Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., Applied Mech., Bd. 54 (1932), Nr. 2, S. 29.

an. Sobald die Strömung turbulent wird, weichen sie von dieser Kurve ab, und zwar um so später, je stärker die Krümmung ist. Die Abweichungsstellen liegen jeweils bei der durch die Krümmung bestimmten kritischen Reynoldsschen Zahl. In der Abbildung ist die von White experimentell ermittelte Widerstandskurve eingezeichnet. Die durch unsere Versuchspunkte gelegte Kurve fällt mit ihr zusammen. Die Abszissenachse stellt das Verhältnis $\frac{\lambda}{\lambda_0}=1$ dar, das dem geraden Rohr entspricht. Bei ganz kleinen Parametern $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$ unterscheidet sich die Widerstandskurve überhaupt nicht vom Widerstandsgesetz des geraden Rohres. Erst etwa bei $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}=12{,}6$ $\left(\text{für } \frac{a}{R}=\frac{1}{400};\ \mathrm{Re}=250\right)$ beginnt sie davon abzuweichen.

Die Kurve, die das durch näherungsweise Integration der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen gewonnene Widerstandsgesetz (3)

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{1}{1-0{,}03048\,K^2+0{,}01195\,K^4}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{0{,}03048}{4}\left[\frac{1}{12}\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}\right]^4+\frac{0{,}01195}{16}\left[\frac{1}{12}\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}\right]^8}$$

darstellt, stimmt mit der experimentellen Widerstandskurve nur bis $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}=18$ $\left(\text{für } \frac{a}{R}=\frac{1}{400};\ \mathrm{Re}=350\right)$ überein. Von da ab weicht sie sehr rasch ab.

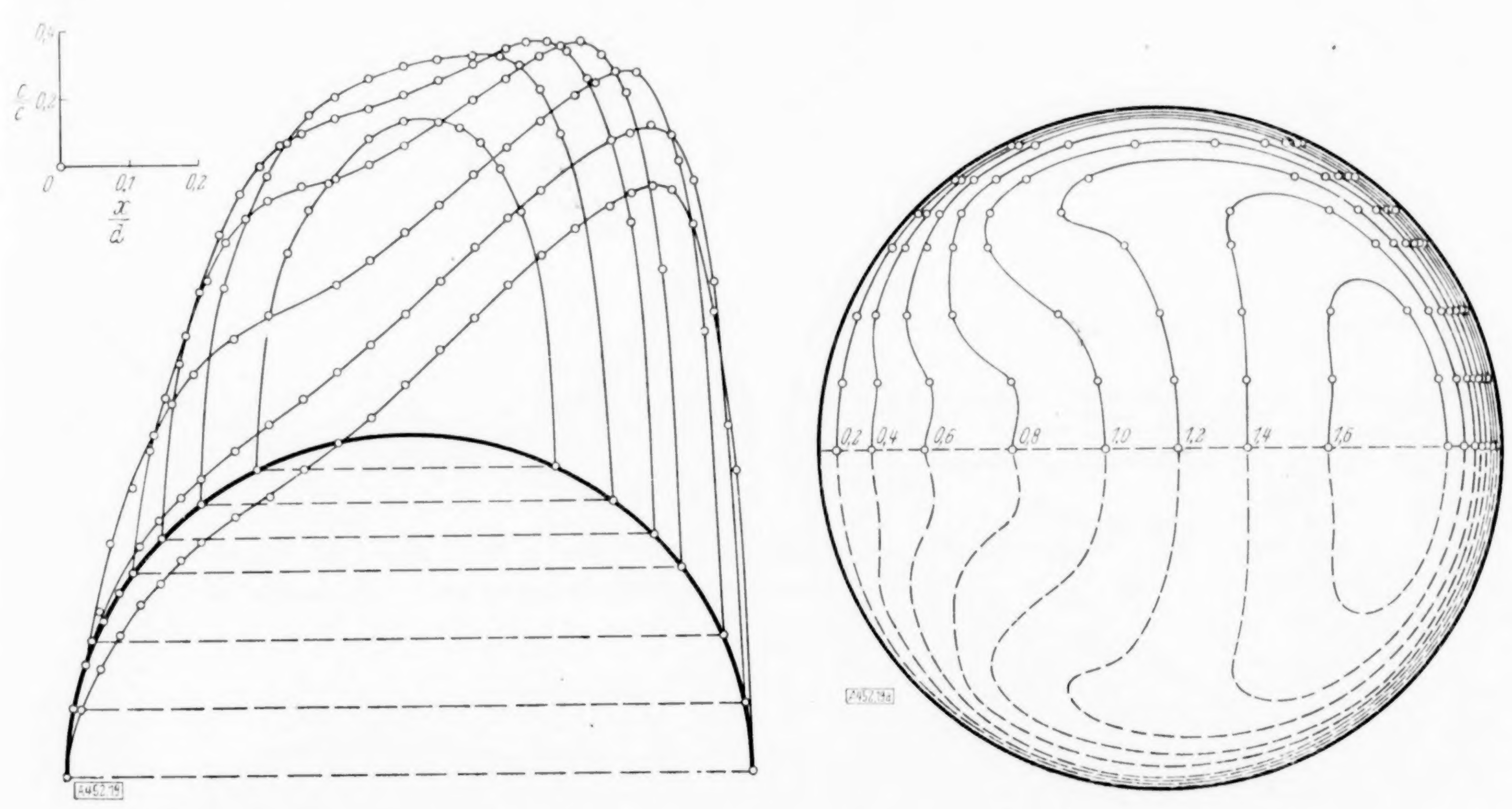


Abb. 19 und 19a. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachen. $\frac{a}{R}=\frac{1}{50}$, Re = 1930, laminar.

Die mit der Grenzschichtbetrachtung gewonnene Beziehung (29)

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=0{,}1064\left[\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

wird in der logarithmischen Auftragung durch eine Gerade dargestellt, der sich die Widerstandskurve mit wachsendem Parameter $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$ immer mehr anschließt.

Prandtl[17]) hat für die Widerstandskurve die Näherungsformel

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=0{,}37\left[\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}\right]^{0{,}36}$$

angegeben, die ebenfalls in Abb. 18 eingetragen ist.

b) Die Geschwindigkeitsverteilung. In den Abb. 19 bis 23 sind Geschwindigkeitsprofile, gemessen über horizontalen Linien, bei laminarer und turbulenter Strömung für 3 Rohre verschiedener Krümmung aufgezeichnet. Die Geschwindigkeiten c sind mit der

[17]) L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre, Braunschweig 1931, S. 121.

mittleren Durchflußgeschwindigkeit $\bar{c}$, der Abstand von der Rohrwand mit dem Rohrdurchmesser d dimensionslos gemacht. Das Maximum der Geschwindigkeit ist überall in die Nähe der äußeren Rohrwand geschoben. Die turbulenten Geschwindigkeitsprofile unterscheiden sich von den laminaren dadurch, daß im Kernstrom der Anstieg von innen nach außen viel flacher verläuft und daß der Geschwindigkeitsabfall in der Nähe der Rohrwand sehr stark ist. Man erkennt auch hier die ausgleichende Wirkung der Turbulenz auf die Geschwindigkeitsverteilung, wie es beim geraden Rohr bekannt ist.

Ein übersichtlicheres Bild der Geschwindigkeitsverteilung über dem Rohrquerschnitt erhält man durch Eintragung der Linien gleicher Geschwindigkeit, die als Isotachen bezeichnet werden. (Abb. 19a bis 23a). Die Geschwindigkeiten sind auch hier dimensionslos gemacht. Die Isotachen sind in gleichen Abstufungen $\frac{c}{\bar{c}} = 0{,}2$ eingetragen, so daß aus ihrem Abstand die größere oder geringere Steilheit des Geschwindigkeitsanstieges zu ersehen ist.

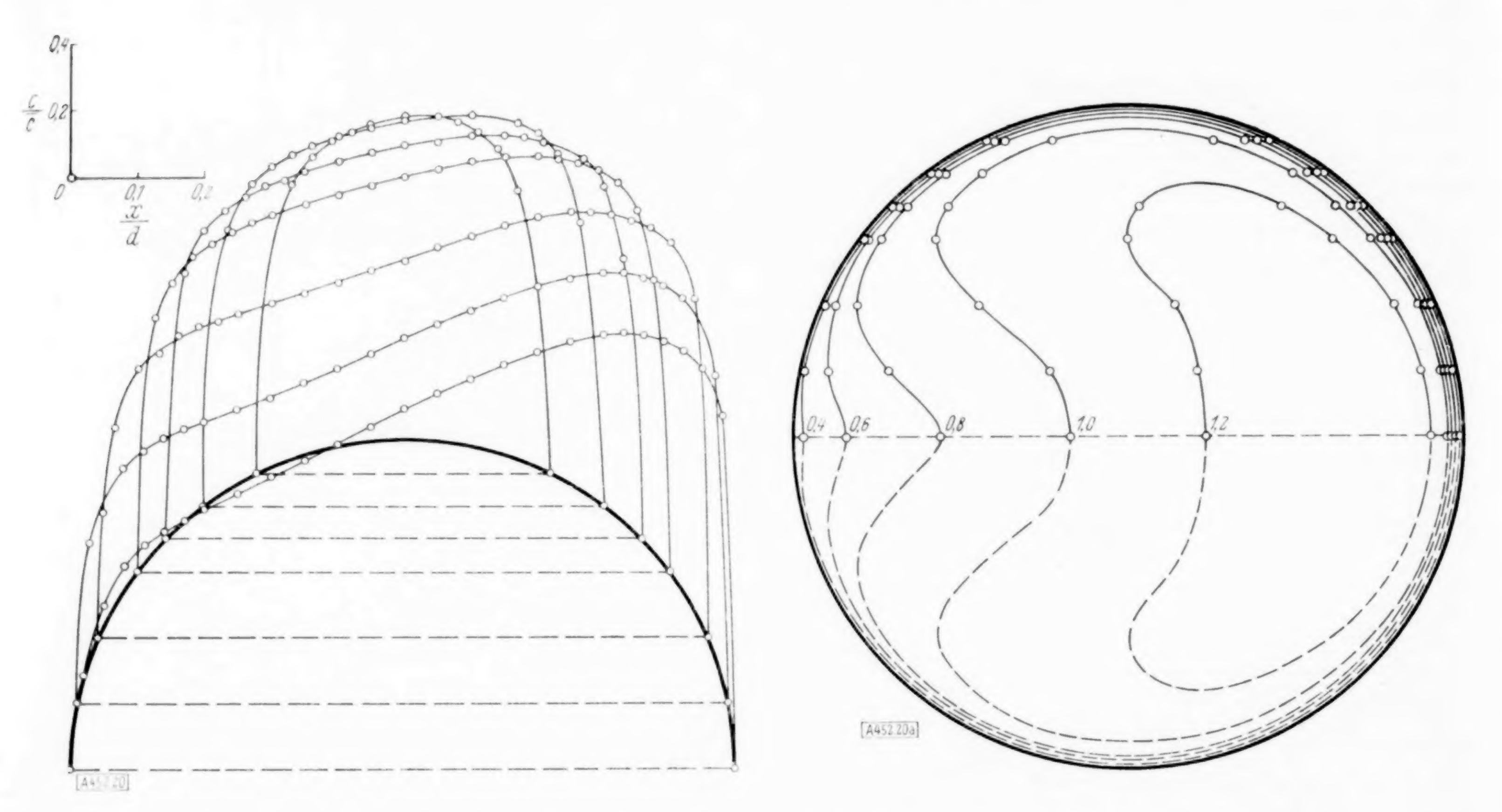


Abb. 20 und 20 a. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachen. $\frac{a}{R} = \frac{1}{50}$, Re = 8540, turbulent.

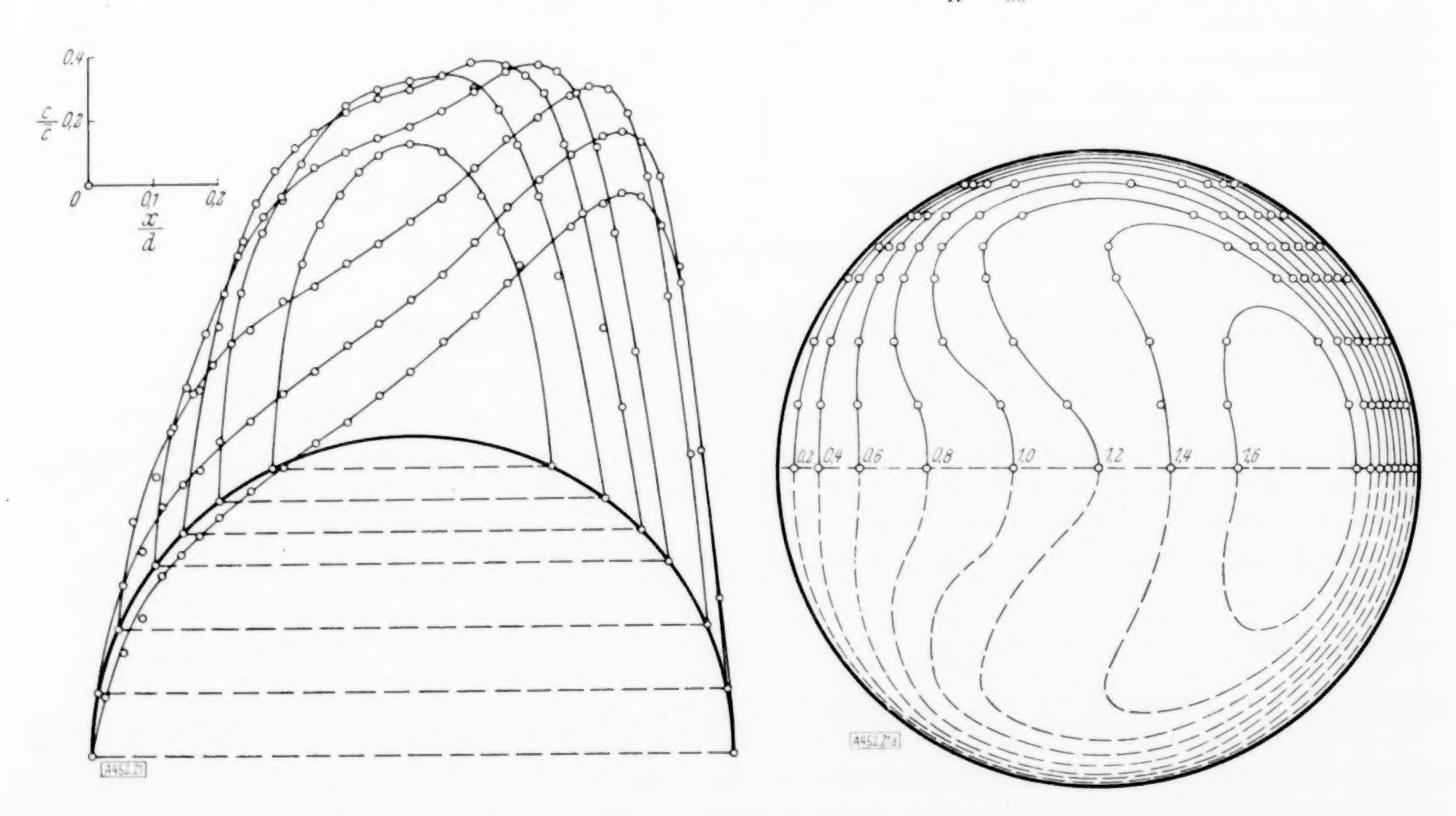


Abb. 21 und 21 a. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachen. $\frac{a}{R} = \frac{1}{100}$, Re = 2050, laminar.

Zusammenfassung. Ein durch näherungsweise Integration der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen für die laminare Strömung im gekrümmten Rohr gewonnenes Widerstandsgesetz, das vom Parameter $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$ (Re = Reynoldssche Zahl, $\frac{a}{R}$ = Krümmungsverhältnis) abhängig ist, ist nur für sehr kleine Reynoldssche Zahlen und Krümmungen brauchbar. Um auch für große Reynoldssche Zahlen im unterkritischen Gebiet eine Gesetzmäßigkeit für den Widerstand zu erhalten, wurde eine Rechnung durchgeführt, die sich auf die Prandtlsche Grenzschichttheorie gründet. Die Lösungen der durch eine Impulsbetrachtung an der Grenzschicht gewonnenen Differentialgleichungen ergeben für den Widerstand ein asymptotisches Gesetz, dem sich die experimentell ermittelten Werte in der Grenze gut anpassen. Auch bei diesem Gesetz ergibt sich eine Abhängigkeit von dem Parameter $\mathrm{Re}\left(\frac{a}{R}\right)^{1/2}$.

Die Widerstandsmessungen erstrecken sich bis in das turbulente Gebiet. Außerdem sind die Geschwindigkeitsverteilungen über dem Rohrquerschnitt für verschiedene Krümmungsverhältnisse bei laminarer und turbulenter Strömung experimentell ermittelt. 452

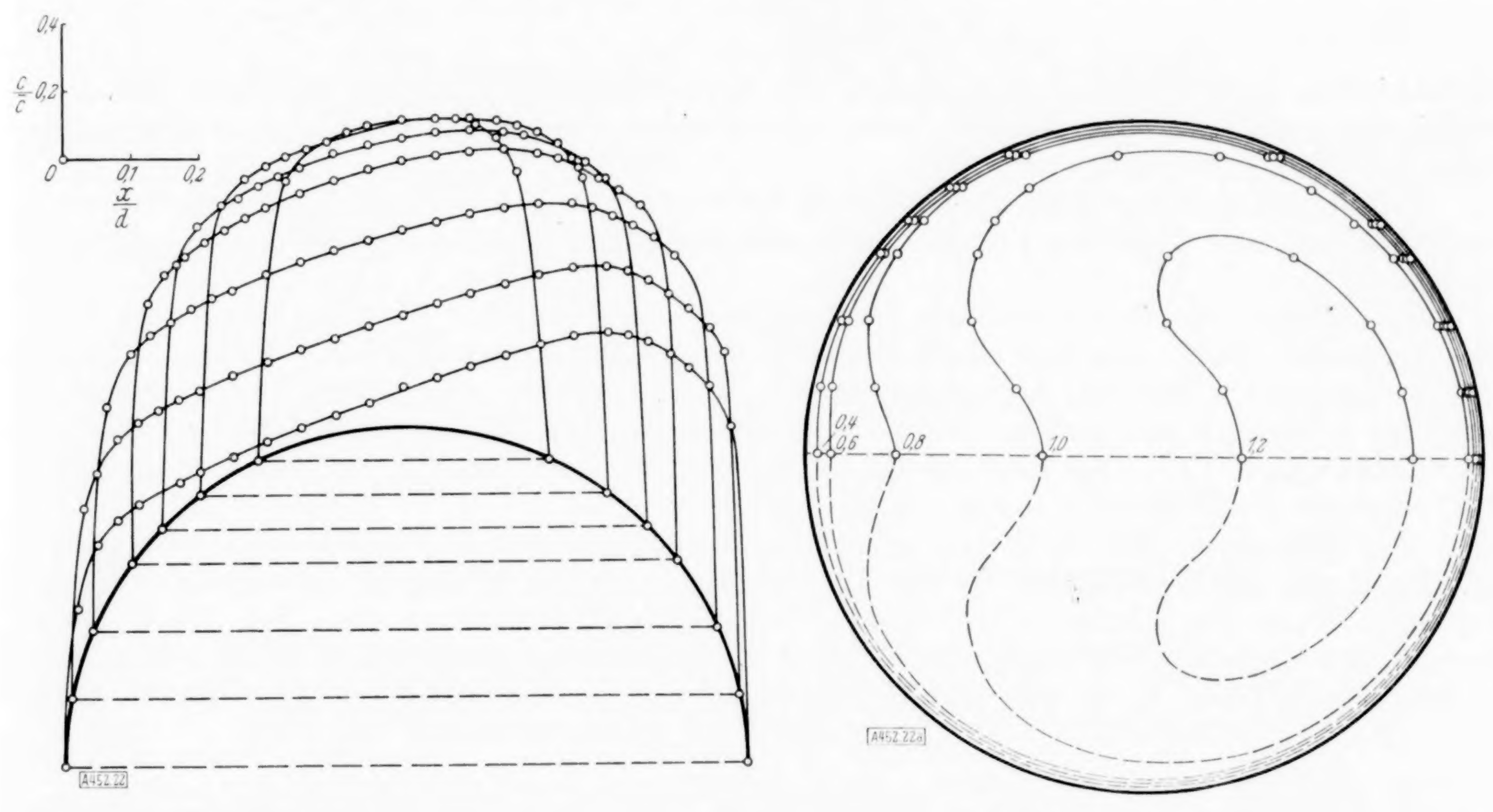


Abb. 22 und 22a. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachen. $\frac{a}{R} = \frac{1}{100}$, Re = 11770, turbulent.

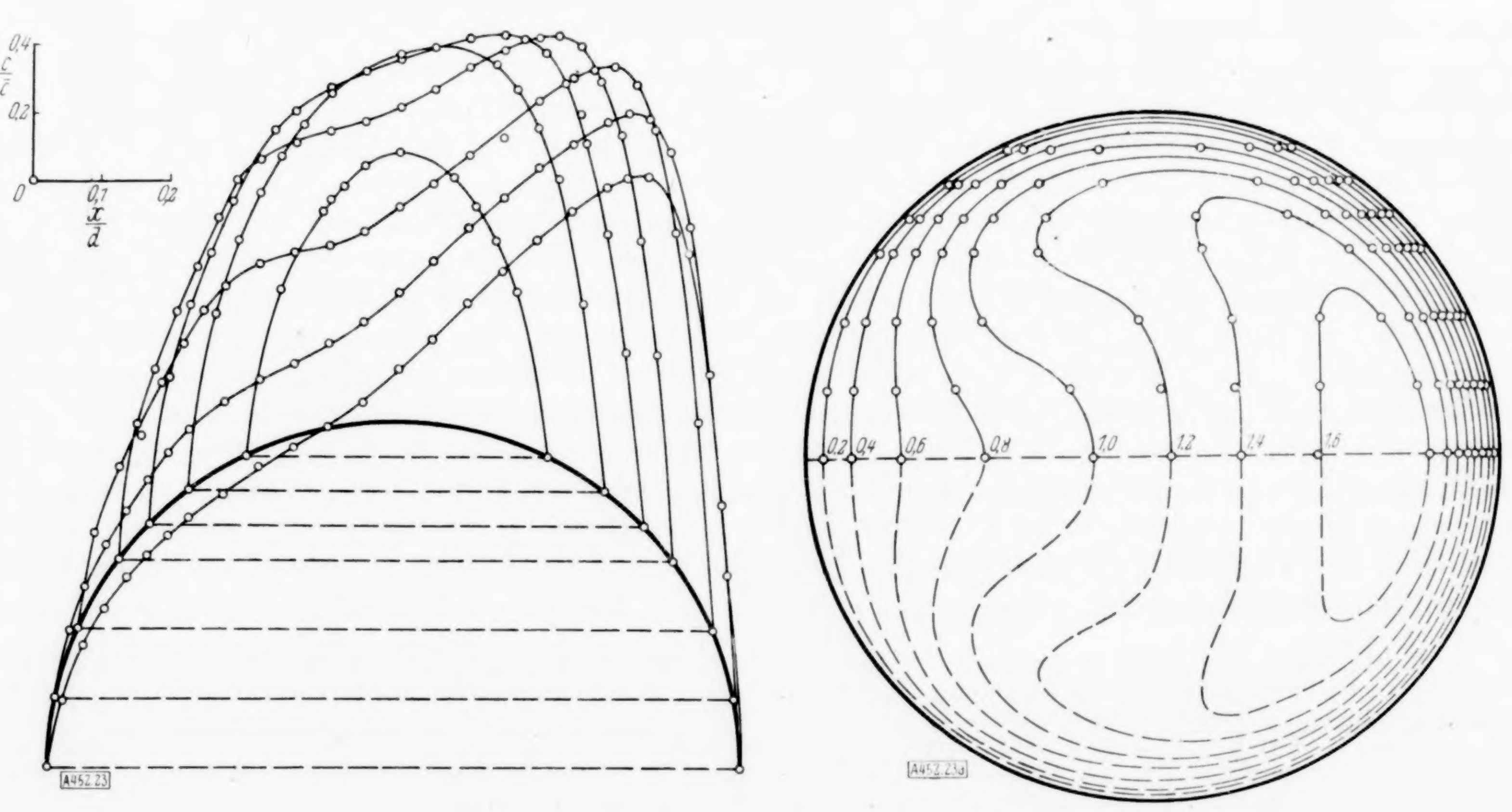


Abb. 23 und 23a. Geschwindigkeitsverteilung und Isotachen. $\frac{a}{R} = \frac{1}{200}$, Re = 3220, laminar.

Planimetrische Auswertung von Stieltjesintegralen.

Von *E. J. Nyström* in Helsingfors.

§ 1. Auswertung durch Planimetrieren unter Benutzung eines zweckmäßigen Koordinatensystems.

Die nicht selten auftretenden Integrale der Gestalt

$$\int_a^b f(t)\,dh(t) \quad \text{oder kurz} \quad \int_a^b f(t)\,dh \qquad (1),$$

wo $f(t)$ und $h(t)$ irgendwie gegebene Funktionen von t, ferner a und b Konstanten sind, heißen Stieltjesintegrale[1]). Für ihre angenäherte Auswertung ist es im allgemeinen nicht vorteilhaft, den Übergang zu Integralen der Form

$$\int_a^b g(t)\,dt \qquad (2)$$

durch direkte Approximation des Produktes

$$g(t) = f(t)\,h'(t) \qquad (3)$$

zu vollziehen, weil in den Anwendungen die auszuwertenden Integrale meistens primär als Stieltjesintegrale auftreten, sondern man approximiert besser den einen Faktor der rechten Seite von (3)[2]).

Bei planimetrischer Auswertung von (1) kann aber der Übergang zu (2) unmittelbar durch die Darstellung der Funktion $f(t)$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem besonderer Art erfolgen.

Wir gehen von der Darstellung der Funktion $h(t)$ durch ihre Funktionsleiter[3]) aus. Diese entsteht, wenn man von einem Punkt O einer t-Achse Strecken $h(t_1)$, $h(t_2)$, ... abträgt und die Endpunkte mit den Argumentwerten t_1, t_2, ... beziffert. In Abb. 1 ist die Funktionsleiter für $h(t) = \sqrt{t}$ angegeben. Mit der benutzten Längeneinheit wird auf der y-Achse eine gleichförmige Teilung konstruiert. In dem so definierten Koordinatensystem kann irgendeine gegebene Funktion $f(t)$ graphisch dargestellt werden.

Wir behaupten, daß die in dem genannten Koordinatensystem gezeichnete Kurve $y = f(t)$ zusammen mit ihren Ordinaten in den Endpunkten a, b des Intervalls und dem dazwischen liegenden Stück der t-Achse eine Figur bildet, deren Flächeninhalt eben den Wert (1) hat. Dies zu beweisen ist sehr einfach. Wenn x die Entfernung des Punktes t der t-Achse vom Ursprung O ist (Abb. 1), so sind die Koordinaten irgendeines Punktes der gezeichneten Kurve

$$x = h(t), \quad y = f(t) \qquad (4),$$

und die bekannte Formel für den Flächeninhalt ergibt nun direkt den Ausdruck (1). Das Integral (1) zeigt somit, als Flächeninhalt gedeutet, gegenüber dem Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ keinen anderen Unterschied als den, daß auf der t-Achse die Funktionsleiter $h(t)$ angebracht ist statt einer gleichförmigen Teilung. Wir können also sagen: Um das Stieltjesintegral (1) planimetrisch zu finden, versieht man die t-Achse mit der Funktionsleiter $h(t)$ und verfährt dann, als ob es sich um ein gewöhnliches Integral der Funktion $f(t)$ handelte.

Die Funktionswerte $f(t)$ werden als Ordinaten gewissen Punkten der t-Achse zugeordnet, da diese Zuordnung durch die Funktion $h(t)$ bestimmt wird, so kann man im Vergleich mit der gewöhnlichen Interpretation von einer Abszissentransformation sprechen.

Sind $f(t)$ und $h(t)$ tabellarisch gegeben, so erfordert die betreffende graphische Darstellung nicht wesentlich mehr Zeit, als die gewöhnliche in rechtwinkligen Parallelkoordinaten. Wenn aber eine oder beide Funktionen graphisch gegeben sind, entsteht die Frage, ob sich nicht ein Umzeichnen der Figur lohnt, da die Methode sich sonst durch große Einfachheit auszeichnet[4]). In den Anwendungen dürfte insbesondere der Fall oft vorkommen, daß $h(t)$ bei einer Reihe verschiedener Funktionen $f(t)$ stets dieselbe ist, und dann vereinfacht sich natürlich das Verfahren, da man dasselbe Koordinatensystem mehrfach anwenden nnd vielleicht im voraus herstellen kann.

---

[1]) Ein bestimmtes Integral der Form (1) kann als Grenzwert einer Summe definiert werden, falls $f(t)$ in (a, b) stetig und $h(t)$ von beschränkter Schwankung ist (vgl. z. B. E. Pascal: Repertorium der höheren Analysis, 2. Aufl., Bd. I, 3, Leipzig und Berlin 1929, S. 1328).

[2]) Hellerich und Schmidt: Numerische Auswertung von Stieltjesintegralen (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 164, S. 243 bis 255 (1931)). — Orloff: Über die angenäherte Auswertung von Stieltjesintegralen (Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV, S. 6, 47 bis 59 (1933)).

[3]) Vgl. z. B. Schwerdt: Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924, S. 15.

[4]) Betr. das praktische Umzeichnen vgl. man die Fußnote [6]).

Als Beispiel betrachten wir das Fresnelsche Integral[5])

$$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z\frac{\sin z}{\sqrt{z}}\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\sqrt{t}}\,dt=\int\limits_0^t\sin\frac{\pi}{2}t\,d\sqrt{t}\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(5).$$

Wenn wir bis $z=\pi$, d. h. $t=2$, integrieren, kommt es auf die Ermittlung des ersten Maximalwerts der Funktion $S(z)$ an.

Der Bogen $0\leq t\leq 2$ der Sinuslinie $y=\sin\frac{\pi}{2}t$ wurde vom Verfasser mit der Leiter der Funktion $h(t)=\sqrt{t}$ dargestellt, wodurch sich die in Abb. 1 sichtbare Kurve ergab; die Längeneinheit war 10 cm. Bei der Planimetrierung der von der Kurve und der t-Achse begrenzten Fläche wurde der Wert $S(\pi)$ mit einer Genauigkeit von etwa 0,3 % erhalten. Der auf drei Stellen abgerundete Wert ist $S(\pi)=0{,}714$. Die Abweichung ist natürlich sowohl auf Ungenauigkeiten der Kurvendarstellung wie auf solche der Planimetrierung zurückzuführen.

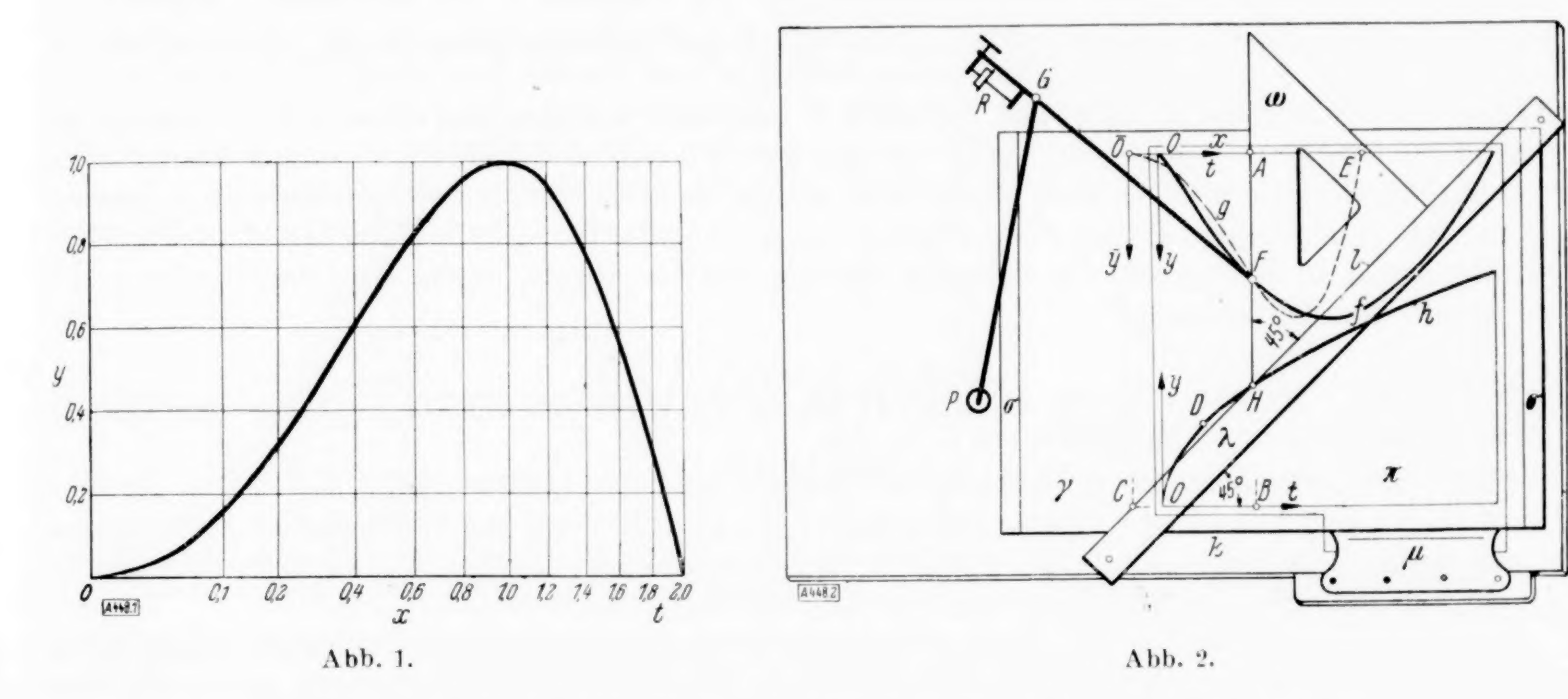


Abb. 1. Abb. 2.

§ 2. Ein Spezialinstrument zur Auswertung von Stieltjesintegralen.

Da das Umzeichnen der Kurve $y=f(t)$ mit einer gewissen Mühe verbunden ist, erscheint es angemessen, nach Methoden zu fragen, die das Stieltjesintegral (1) direkt durch Planimetrieren zu bestimmen gestatten, falls die Kurvenbilder f und h der in (1) auftretenden Funktionen schon gezeichnet, bzw. photographiert vorliegen. Um ein solches Verfahren zu finden, liegt es nahe, die in § 1 besprochene Abszissentransformation durch eine Bewegung des Zeichenblattes zu ersetzen, und eben diese Idee liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde.

Die erwähnte Bewegung sowie die sonstige Anordnung kann mit recht einfachen Mitteln realisiert werden, und zwar ist die ganze Apparatur in Abb. 2 ziemlich genau im Anschluß an die vom Verfasser vorgenommenen Versuche dargestellt. Vielleicht läßt sich dieselbe noch vereinfachen, bzw. zwecks Erlangung größerer Genauigkeit abändern, worauf wir noch zurückkommen werden.

Der Einfachheit wegen möge angenommen werden, die benutzte Längeneinheit sei für beide Kurven dieselbe. Später machen wir eine Bemerkung über den Fall, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Die beiden Zeichenblätter mit den Kurven f und h seien so miteinander verbunden, bzw. auf einem dritten Blatt π befestigt, daß die t-Achsen parallel sind und die y-Achsen aufeinanderfallen, ohne daß die Kurven sich schneiden. In Abb. 2 sind die in § 1 besprochenen Funktionen $f(t)=\sin\frac{\pi}{2}t$ und $h(t)=\sqrt{t}$ auf diese Weise in zwei Koordinatensystemen $O(t,y)$ abgebildet, wegen Platzersparnis sind die positiven Richtungen der y-Achsen einander entgegengesetzt gewählt.

Das Zeichenblatt π wird zwischen ein (horizontal liegendes) Reißbrett und eine feste Glasscheibe γ gebracht, und zwar so, daß die t-Achsen einer Kante k des Reißbretts parallel werden (Abb. 2). Damit das Papier π mit Hilfe einer Klemmvorrichtung μ und einer Lauf-

[5]) Vgl. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, Leipzig und Berlin 1909, S. 23 f. (Die 1933 gedruckte neue Auflage ist an der betreffenden Stelle weniger ausführlich.)

schiene in der Richtung von k verschoben werden kann, ist die Glasscheibe γ von zwei randlich gelegenen dicken Papierstreifen σ gestützt. Auf der Glasplatte befindet sich ferner ein in dem Reißbrett befestigtes Zelluloidlineal λ, dessen eine Kante l um 45^0 gegen k und die Richtung der t-Achsen geneigt ist, sowie ein bewegliches rechtwinklig-gleichschenkliges Zelluloiddreieck ω. Dieses kann mit seiner einen Kathete längs der Kante l von λ gleitend so bewegt werden, daß seine Hypotenuse gegen k stets rechtwinklig bleibt.

Das nun beschriebene Gerät in Verbindung mit einem gewöhnlichen Planimeter gestattet die Auswertung von Stieltjesintegralen.

Wir betrachten die geradlinige Bewegung des Zeichenblatts π, nachdem dasselbe in der Klemmvorrichtung μ befestigt und der Parallelismus der t-Achsen und k kontrolliert worden ist. Bezeichnen wir mit H einen Schnittpunkt der Kurve h mit der Linealkante l, so hat die Verschiebung des Papiers π zur Folge, daß H die Kurve h stetig durchläuft. Wir denken uns nun das Dreieck ω so bewegt, daß der eine Endpunkt seiner Hypotenuse stets mit dem Punkt H zusammenfällt; die y-parallel bleibende Hypotenuse bestimmt dann auf der Kurve f einen Punkt F, und eben diesem beweglichen Punkt soll der Fahrstift des Planimeters folgen.

Um den nicht gezeichnet vorhandenen Ort g des Punktes F (in der Abb. 2 gestrichelt) zu untersuchen, bedienen wir uns eines ruhenden Koordinatensystems (x, y), dessen x-Achse mit der zur Kurve f gehörigen t-Achse zusammenfällt und dessen Ursprung $\bar{O}$ als Orthogonalprojektion des Schnittpunktes C der Geraden l und der x-Achse der Kurve h bestimmt ist. In diesem System ist die Abszisse von F gleich $x = \bar{O}A = CB = BH = h(t)$, wo t die gemeinsame Abszisse der Punkte H und F in den auf π gezeichneten beweglichen Koordinatensystemen ist. Die Ordinate von F im System (x, y) ist offenbar $y = AF = f(t)$. Der Punkt F beschreibt somit in bezug auf die ruhende Ebene, das Reißbrett, bzw. die Glasscheibe γ die Kurve g mit den Gleichungen

$$x = h(t), \quad y = f(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

die ja mit der Kurve (4) identisch ist.

Aus dem eben Gesagten erhellt die Wirkungsweise des Instruments. Es wird in der Tat die in § 1 betrachtete Figur planimetriert, nur liegt die krummlinige Begrenzung derselben jetzt nicht gezeichnet vor, sondern die beweglichen Ebenen π und ω bestimmen in jedem Augenblick die richtige Lage des Planimeterfahrstiftes[6]).

Unser Apparat kann zwar nicht als kompliziert bezeichnet werden, wohl aber seine Handhabung. Es müssen in der Tat zwei Personen bei seinem Gebrauch tätig sein; die eine hält den Planimeterstift im Punkte F, während die andere mit der linken Hand für die Parallelbewegung des Papiers sorgt und mit der rechten eine Winkelspitze des Dreiecks ω die Kurve h entlang führt. Beide Führungen sind wesentlich schwieriger zu bewerkstelligen als ein einfaches Entlangführen des Planimeterstifts längs einer Kurve, und sie erfordern einige Übung.

Nach den Versuchen des Verfassers ist bei Auswertung von Stieltjesintegralen (1) eine Genauigkeit von etwa 1‰ verhältnismäßig leicht zu erreichen.

Eine gewisse Erleichterung in dem Gebrauch des Instruments wird erzielt, wenn man durch Schlitze oder andere Anordnungen verhindert, daß der Planimeterstift und die Winkelspitze H des Dreiecks ω sich von den ihnen vorgeschriebenen Geraden überhaupt entfernen können. Der naheliegende Gedanke, die Parallelbewegung des Papiers automatisch zu bewerkstelligen, scheint von zweifelhaftem Nutzen zu sein, wenn man beachtet, daß es ein Vorteil ist, die Geschwindigkeit des Papiers nach Belieben regeln zu können. Besser scheint die Idee, das Planimeter auf einem in der t-Richtung beweglichen Wagen aufzustellen, dieselbe kann aber nicht mit ganz einfachen Mitteln realisiert werden.

Über die Führung ist des näheren folgendes zu bemerken. Die Hypotenuse des Dreiecks ω verschiebt sich bei monoton verlaufender Funktion h stets in demselben Sinn, dagegen ändert sich im allgemeinen der Sinn der Verschiebung des Papiers π in jedem Punkt D, wo die Linealkante l die Kurve h berührt. Man ist geneigt, eine solche Stelle als eine besonders schwierige anzusehen, da der Punkt H als Schnittpunkt von h und l überhaupt in einer mehr oder weniger weiten Umgebung von D schlecht bestimmt ist. Zu beachten ist aber, daß die Lage D des Punktes H einer Umkehrstelle in der Verschiebung des Zeichenblattes π entspricht, wo seine Geschwindigkeit gleich Null ist. Der Planimeterstift wird also längs einer Kurve auf nahezu ruhender Unterlage verschoben, was natürlich leicht ist; die Kurven g und h decken sich in der Umgebung der betreffenden Stelle.

[6]) Um die Kurve g wirklich punktweise zu zeichnen, braucht man nur ein Stück durchsichtiges Millimeterpapier auf die Glasscheibe γ zu legen und von beliebig gewählten Punkten H der Kurve h nach Punkten F der Kurve f heraufzuloten.

Schwierigkeiten treten dagegen auf, wenn die Kurve h nahezu parallel der y-Achse verläuft, also wenn die Funktion $h(t)$ ein sehr heftiges Steigen bzw. Fallen aufweist.

Wären die Kurven f und h mit verschiedener Längeneinheit der y-Achsen gezeichnet, so brauchte man nur die Neigung des Lineals λ gegen k zu ändern. Man könnte auch durch mechanische Hilfsmittel auf eine eventuelle Verschiedenheit der Längeneinheit der t-Achsen sowie auf eine schräge Lage der Kurvenbilder Rücksicht nehmen, hierauf wollen wir aber nicht eingehen.

Der Apparat kann insbesondere zur Bestimmung von statischen Momenten und Trägheitsmomenten $\int_a^b t f(t)\,dt$ bzw. $\int_a^b t^2 f(t)\,dt$ in bezug auf eine y-parallele Gerade dienen. Hierbei ist ersichtlich $h(t) = \frac{1}{2} t^2$, bzw. $h(t) = \frac{1}{3} t^3$ zu setzen. Auch könnte man damit Fourierkoeffizienten bestimmen. Werden die entsprechenden Führungen mittels Schlitze bewerkstelligt, so kann der Apparat von einer Person gebraucht werden.

Schließlich ist zu bemerken, daß der Apparat nicht nur zur Auswertung bestimmter Integrale brauchbar ist, sondern, wie auch das einfache Planimeter, als Integrator[7]), so daß die Planimeterrolle stetig den Wert der Funktion $\int_a^t f(t)\,dh(t)$ entweder direkt oder nach Hinzufügen einer unmitttelbar abzulesenden Korrektion anzeigt. Diese Anwendungsmöglichkeit beruht darauf, daß wir über die Aufstellung des Planimeters keine Voraussetzungen nötig gehabt haben, außer der selbstverständlichen, daß es auf dem Reißbrett für seine Bewegung genügend Platz finden muß. 448

Beitrag zur Theorie dünner schwach gewölbter Tragflügelprofile*).

Von *F. Weinig* in Berlin-Charlottenburg.

Aus dem Institut für technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.

I. Die Abbildungsfunktion. Durch die Beziehung

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

wird ein Streckenprofil der $z = x + i\,y$-Ebene in einen Kreis der $\zeta = \xi + i\,\eta$-Ebene abgebildet. Das Streckenprofil fällt hierbei in die x-Achse; Anfangs- und Endpunkt haben die Abszissen $x = +1$ und $x = -1$. Der Bildkreis hat seinen Mittelpunkt in $\xi = 0$, $\eta = 0$ und hat den Radius $r = 1$. Für Punkte des Bildkreises ist also $\zeta(k) = e^{i\alpha}$, wenn α den Winkel zwischen dem Fahrstrahl nach dem betreffenden Punkte und der ξ-Achse bedeutet.

Zwischen den Punkten des Streckenprofils $z = x$ und denen des Bildkreises $\zeta = e^{i\alpha}$ besteht die Beziehung:

$$x = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \cos\alpha\,.$$

Bildet man nun ein dünnes schwachgewölbtes Profil, dessen Endpunkte mit denen des oben beschriebenen Streckenprofils zusammenfallen, in gleicher Weise ab, so wird die entsprechende Kontur k' um so weniger vom Bildkreis des Streckenprofils abweichen, je weniger gekrümmt und je dünner das Profil ist. Im Grenzfalle werden also diese Abbildungen zusammenfallen.

---

[7]) Man sehe die Arbeit des Verfassers: Anwendung des Planimeters als Integrator (Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys.-Math. VII. 10), Helsingfors 1934, 25 S.

*) Anmerkung. Die Arbeit betrifft das gleiche Problem, das schon Munk (Nat. adv. comm. f. aeronautics Rep. 142 und 191) und Birnbaum (ZAMM 1923, S. 190) behandelt haben. Der Vorteil der hier mitgeteilten Ergebnisse besteht darin, daß man bei der angegebenen Entwicklung nur die ersten Glieder (ν_0, ν_1, ν_2) zur Kenntnis der Haupteigenschaften des Profils (Anstellrichtung für glattes Umströmen, Auftrieb, Moment) zu ermitteln braucht. Die Entwicklung selbst ist eine in Fourierreihen, wo nur die $\cos n\alpha$ Glieder stehenbleiben, so daß auch die Koeffizienten-Ermittlung einfacher wird als bei Birnbaum oder Munk. Als Nebenergebnis erhält man in einfachster Weise auch die Geschwindigkeitsverteilung an den Profilen. Auf anderm Wege kam Glauert (Tragflügel- und Propellertheorie) zu ähnlichen Ergebnissen. Das hier angewandte Verfahren ist aber sehr einfach und allgemein anwendbar. Die Arbeit konnte deshalb als Ausgang für Doppeldecker-, Gitter- und Gleitflächen-Probleme dienen, die sich hiermit in recht einfacher Weise lösen ließen. Hierüber wird besonders berichtet werden. Die Anwendung einer ähnlichen Methode auf endlich dicke Profile ist in Vorbereitung.

II. Die Isoklinen und Isotachen der Strömung. $\chi(z) = \varphi + i\,\psi$ stellt bekanntlich eine Strömung in der z-Ebene dar, wenn man φ als das Potential, ψ als die Stromfunktion auffaßt. $\frac{d\,\chi(z)}{d\,z} = -\,\overline{\mathfrak{w}} = -\,\mathfrak{u} + i\,\mathfrak{v}$ ist dann der an der y-Achse gespiegelte Wert der Geschwindigkeit der Strömung. Damit wird $\ln \frac{d\,\chi(z)}{d\,z} = \ln - \overline{\mathfrak{w}} = \ln w + i\,(\pi - \nu)$. Hierbei ist w der Absolutwert der Geschwindigkeit, ν die Richtung, den diese Geschwindigkeit mit der x-Achse einschließt. Die Linien $\ln w = \text{const}$ sind Isotachen, die Linien $\nu = \text{const}$ Isoklinen der Strömung $\chi(z)$.

Für die folgenden Betrachtungen ist es zweckmäßiger,

$$\mu(z) = -\,i\left(\pi - \ln \frac{d\,\chi(z)}{d\,z}\right) = \nu + i \ln w$$

einzuführen.

Die Strömungsrichtungen sind also hierdurch als Realteil, die Logarithmen der Geschwindigkeiten als Imaginärteil einer Funktion μ der komplexen Veränderlichen z dargestellt.

Für die Parallelströmung in Richtung der positiven x-Achse $x = -\,z$ um ein Streckenprofil ist natürlich $\mu = \text{const} = 0$. Für andere Strömungen ist aber $\mu(z)$ von z abhängig. Bildet man nun die Isoklinen und Isotachen der Strömung in der z-Ebene in die ζ-Ebene ab, so ist das Bild $\mu(\zeta)$ natürlich nicht mehr das Isoklinen-Isotachenfeld der Strömung χ in der ζ-Ebene.

Man kann sich aber in der ζ-Ebene irgendein im Äußeren des Einheitskreises reguläres $\mu(\zeta)$ geben und nach dem Profil suchen, das in der z-Ebene gelegen ist und $\mu(z)$ dort als Isoklinen-Isotachenfeld besitzt. Es ist nun allgemein $\operatorname{tg} \nu = \frac{d\,y}{d\,x}$. Man kann auf diese Weise ganz allgemein ein Verfahren entwickeln, um zu in der ζ-Ebene gegebenem $\mu(\zeta)$ Profile in der z-Ebene zu finden.

Wir wollen uns hier jedoch nur mit dünnen, wenig gewölbten Profilen abgeben. Solchen Profilen können natürlich nur ganz gewisse $\mu(\zeta)$ entsprechen. Zunächst wollen wir noch annehmen, daß die Profile glatt umströmt werden, d. h. daß Anfangs- und Endpunkt dieser Profile die Verzweigungspunkte der Strömung werden. Bei dieser Strömung ist die Richtung der Geschwindigkeit auf beiden Seiten des Profils die gleiche. Je schwächer die Profile gekrümmt sind, desto mehr werden aber auch die Potentiale auf beiden Seiten der Profile einander gleich, nämlich $\varphi = x$. Am Bildkreis ist $\varphi(k) = \cos\alpha$. Die Richtung ν ist bei verschwindender Dicke und Wölbung nur von $\cos\alpha$ abhängig, ist also, da $\cos - \alpha = \cos\alpha$, für positive und negative α die gleiche.

In Abhängigkeit von α als Parameter muß sich demnach ν in der Form

$$\nu = \nu_0 - \nu_1 \cos\alpha + \nu_2 \cos 2\,\alpha - \nu_3 \cos 3\,\alpha + . - \ldots$$

darstellen lassen, wobei natürlich ebenso wie ν auch $\nu_0, \nu_1, \nu_2 \ldots$ nur sehr kleine reelle Größen sein können.

III. Profile, deren Isoklinen-Isotachen in der Bildkreisebene durch Doppelquellen dargestellt werden. Die Darstellung von ν zeigt, daß ν der Realteil von

$$\mu = (\nu_0 + i \ln w_\infty) + \left(-\frac{\nu_1}{\zeta} + \frac{\nu_2}{\zeta^2} - \frac{\nu_3}{\zeta^3} + . - \ldots\right)$$

ist.

Die einzelnen Glieder $\frac{\nu_1}{\zeta}, \frac{\nu_2}{\zeta^2}, \frac{\nu_3}{\zeta^3} \ldots\ldots$ stellen jedes eine Strömung aus Doppelquellen erster und höherer Ordnung dar, die in $\zeta = 0$ gelegen sind. Es ist deshalb interessant zunächst zu untersuchen, welche Profile sich aus Isoklinen-Isotachenfeldern ergeben, die in der ζ-Ebene durch solche Doppelquellen dargestellt werden.

Da die ν_i nur sehr kleine Werte haben sollen, so kann man

$$\operatorname{tg} \nu = \nu$$

setzen. Dann erhält man die gesuchten Profile, entsprechend

$$y = \int_{-1}^{x} \operatorname{tg} \nu\, d\,x + C\,, \quad x = \cos\alpha\,, \quad d\,x = -\sin\alpha\, d\,\alpha$$

aus

$$y = -\int_0^{\alpha} (\nu_0 - \nu_1 \cos\alpha + \nu_2 \cos 2\,\alpha - \nu_3 \cos 3\,\alpha + . - \ldots) \sin\alpha\, d\,\alpha + C\,.$$

Man kann natürlich y in seine einzelnen Anteile

$$\overline{y}_n = \mp \int_0^\alpha v_n \cos n\,\alpha \sin \alpha\, d\,\alpha + C_n$$

zerlegen. Soll aber $y_n(-1) = y_n(+1) = 0$ sein, so muß man auch noch v_0 in solche Anteile zerlegen, daß dieser Bedingung genügt wird

$$v_0 = -v_{01} + v_{02} - v_{03} + v_{04}\,.$$

Dann kann man schreiben

$$y_n = \mp \int_0^\alpha (v_{0n} + v_n \cos n\,\alpha) \sin \alpha\, d\,\alpha + C_n\,.$$

Durch Integration ergibt sich

$$y_1 = + \frac{v_1}{2}(1 - \cos^2 \alpha) = + \frac{v_1}{2}(1 - x^2)$$

$$y_n = + \frac{v_n}{2}\left(\frac{\cos(n-1)\,\alpha}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\,\alpha}{n+1} - \frac{2}{n^2-1}\right) \quad [n = 3, 5, 7\ldots]$$

$$y_n = - \frac{v_n}{2}\left(\frac{\cos(n-1)\,\alpha}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\,\alpha}{n+1} - \frac{2\cos\alpha}{n^2-1}\right) \quad [n = 2, 4, 6\ldots].$$

Die Anteile von v_0 sind

$$v_{0n} = 0 \quad \text{für } n = 1, 3, 5, 7\ldots$$

$$v_{0n} = \frac{v_n}{n^2-1} \quad \text{für } n = 2, 4, 6\ldots$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\cos m\,\alpha = \cos^m \alpha - \binom{m}{2}(1 - \cos^2\alpha)\cos^{m-2}\alpha + \binom{m}{4}(1-\cos^2\alpha)^2 \cos^{m-4}\alpha - . + \ldots,$$

oder

$$\cos \alpha = x \qquad \cos 5\,\alpha = 26\,x^5 - 20\,x^3 + 5\,x$$

$$\cos 2\,\alpha = 2\,x^2 - 1 \qquad \cos 6\,\alpha = 32\,x^6 - 48\,x^4 + 18\,x^2 - 1$$

$$\cos 3\,\alpha = 4\,x^3 - 3\,x \qquad \cos 7\,\alpha = 64\,x^7 - 112\,x^5 + 56\,x^3 - 7\,x$$

$$\cos 4\,\alpha = 8\,x^4 - 8\,x^2 + 1 \qquad \cos 8\,\alpha = 128\,x^8 - 256\,x^6 + 160\,x^4 - 32\,x^2 + 1$$

läßt sich $y(x)$ darstellen:

$$y_1 = + \frac{v_1}{2}(1 - x^2) \qquad y_4 = - \frac{v_4}{2}(-2 + 5\,x^2 - 3\,x^4)\frac{16}{15}\,x$$

$$y_2 = - \frac{v_2}{2}(1 - x^2)\cdot\frac{4}{3}\,x \qquad y_5 = + \frac{v_5}{2}(1 - 15\,x^2 + 30\,x^4 - 16\,x^6)\cdot\frac{1}{3}\,.$$

$$y_3 = + \frac{v_3}{2}(-1 + 3\,x^2 - 2\,x^4)$$

IV. Bestimmung der Koeffizienten der Doppelquellen durch harmonische Analyse. Ist ein dünnes, schwach gewölbtes Profil gegeben, so könnte man durch Darstellung dieses Profils als ganze rationale Funktion und entsprechende Zerlegung die Koeffizienten $v_1, v_2 \ldots.$ finden. Einfacher ist es jedoch, $y' = \frac{d\,y}{d\,x}$ zu bestimmen und dann y' in Abhängigkeit von $\alpha = \operatorname{arc}\cos x$ darzustellen. Die harmonische Analyse, die bei unserem Profil natürlich nur $\cos n\,\alpha$-Glieder ergeben kann, liefert dann sehr schnell neben $v_1, v_2, v_3 \ldots.$ auch v_0. Dieser Wert ist nämlich der Mittelwert der y' im Intervall π.

In vielen Fällen wird es genügen, nur v_1 und v_2 zu bestimmen. Am einfachsten bekommt man bei einem Profil zweiter Ordnung v_1 und v_2 aus den Anfangs- und Endneigungen. Es ist

$$\frac{d\,y_1}{d\,x} = -v_1\,x\,; \quad \frac{d\,y_2}{d\,x} = + v_2\left(2\,x^2 - \frac{2}{3}\right).$$

Es ist also

$$\nu(+1) = -\nu_1 + \frac{4}{3}\nu_2 \qquad \nu(-1) = +\nu_1 + \frac{4}{3}\nu_2$$

und hieraus

$$\nu_1 = \frac{\nu(-1) - \nu(+1)}{2} \qquad \nu_2 = +\frac{3}{8}(\nu(-1) + \nu(+1)).$$

Diesen Werten entspricht

$$\nu_0 = \nu_{02} = \frac{\nu_2}{3} = +\frac{1}{8}(\nu(-1) + \nu(+1)).$$

V. Anstellungsrichtung für glattes Umströmen. Wir haben verlangt, daß das Profil glatt umströmt werde. Da die Sehne des Profils in die x-Achse fällt, wird im allgemeinen die Richtung der Strömung im Unendlichen, die Anströmrichtung, die glattem Umströmen entspricht, nicht in diese Achsenrichtung fallen. Diese Richtung finden wir aus

$$\mu = (\nu_0 + i \ln w_\infty) - \frac{\nu_1}{\zeta} + \frac{\nu_2}{\zeta^2} - \frac{\nu_3}{\zeta^3} + . - \ldots$$

Für sehr große ζ wird der Realteil von μ, welcher der Strömungsrichtung entspricht,

$$\nu = \nu_0 .$$

Dies ist also der Anstellwinkel für glattes Umströmen:

$$\nu_0 = \Sigma \nu_{0n} = \Sigma \frac{\nu_n}{n^2 - 1} \qquad (n = 2, 4, 6 \ldots).$$

Der Imaginärteil von μ ist für sehr große

$$\ln w = \ln w_\infty .$$

Die Geschwindigkeit im unendlichen w_∞ ist also frei wählbar.

VI. Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei glattem Umströmen. Aus dem Imaginärteil von μ erhält man die Geschwindigkeitsverteilung w_0 bei glattem Umströmen auf dem Profil:

$$\ln \frac{w_0}{w_\infty} = \nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots$$

$$\frac{w_0}{w_\infty} = e^{\nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots}.$$

Aus der Bernoullischen Gleichung ergibt sich die Druckverteilung

$$\frac{p}{q} = 1 - \left(\frac{w_0}{w_\infty}\right)^2 = 1 - e^{2(\nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots)}.$$

Da nun voraussetzungsgemäß die ν_n nur klein sind, so erhält man entsprechend

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots \qquad e^\delta_{\delta \to 0} \to 1 + \delta$$

$$\frac{w_0}{w_\infty} = 1 + \nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots$$

$$\frac{p}{q} = -2(\nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots).$$

VII. Auftrieb bei glattem Umströmen und auftriebfreier Anströmrichtung. Aus der Druckverteilung läßt sich durch Integration der Auftrieb bestimmen bzw. der Auftriebsbeiwert. Da der Unterdruck auf der einen Profilseite gleich dem Überdruck auf der anderen ist, ist der Druckunterschied auf beiden Seiten des Profils

$$\frac{\Delta p}{q} = +4(\nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots).$$

Da die Gesamtlänge des Profils $l=2$ ist, findet man:

$$\zeta_a = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{\Delta p}{q}\, d x .$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\zeta_a = 2\int_0^\pi (\nu_1 \sin \alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots) \sin \alpha\, d\alpha .$$

In diesem Integral verschwinden sämtliche aus $\nu_2, \nu_3 \ldots\ldots$ herrührenden Teile, und es verbleibt als Auftriebsbeiwert:

$$\zeta_a = \nu_1 \cdot \pi .$$

Zählt man die Anstellung von der ersten Achse des Profils, der Richtung der auftriebsfreien Anströmung aus, mit δ, so ist allgemein

$$\zeta_a = 2\pi k \sin \delta .$$

Bei einem Streckenprofil ist $k=1$, und bei dünnen Profilen schwacher Wölbung ist k ebenfalls $k \to 1$. Somit findet man

$$\sin \delta = \frac{\nu_1}{2},$$

oder, da ν_1 nur klein ist,

$$\delta = \frac{\nu_1}{2}.$$

Sind alle $\nu_n\,(n>1)=0$, so ist das Profil ein Kreisbogen, der an seinen Endpunkten den Winkel ν_1 mit der Sehne einschließt. Die erste Achse des Kreisbogenprofils halbiert also diesen Winkel. Dies Resultat stimmt mit den Ergebnissen exakter Berechnung überein.

VIII. Moment bei glattem Umströmen und Bedingung für festen Druckpunkt. Aus der Druckverteilung kann man auch das Moment des Auftriebs berechnen. Zweckmäßig berechnet man zunächst das Moment bzw. dessen Beiwert, bezogen auf den Mittelpunkt (0) des Profils

$$\zeta_{m_0} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} \frac{\Delta p}{q} \cdot x \cdot d x .$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\zeta_{m_0} = \int_0^\pi (\nu_1 \sin \alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - \cdot + \ldots) \cos \alpha \sin \alpha\, d\alpha$$

$$\zeta_{m_0} = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\nu_1 \sin \alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + \nu_3 \sin 3\alpha - . + \ldots) \sin 2\alpha\, d\alpha .$$

In diesem Integral verschwinden sämtliche mit anderen Koeffizienten als ν_2 behafteten Glieder. Man findet somit

$$\zeta_{m_0} = -\frac{1}{4}\nu_2 \pi .$$

Bekanntlich hüllen die Angriffslinien des Auftriebs eine Parabel ein. Bezogen auf den Brennpunkt dieser Auftriebsparabel ist das Moment des Auftriebs konstant. Wird die Brennweite dieser Parabel null, so gehen alle Angriffslinien des Auftriebs durch den Brennpunkt F dieser ausgearteten Parabel. Dieser Punkt wird dann zum festen Druckpunkt.

Ein Streckenprofil hat einen solchen festen Druckpunkt. Er liegt in $x = \Theta = -\frac{1}{2}$, bei der Strömung von links und rechts. Bei schwacher Wölbung ist natürlich der Druckpunkt im allgemeinen nicht mehr fest, wie man schon am Kreisbogenprofil sehen kann. Aber der

Brennpunkt der Auftriebsparabel liegt um so näher an $x = -\frac{1}{2}$, je dünner und schwächer gewölbt das Profil ist. Für sehr dünne, schwachgewölbte Profile erhält man also im Grenzfalle einen festen Druckpunkt, wenn das Moment bezüglich dieses Punktes Θ verschwindet. Bezüglich dieses Punktes muß also $\zeta_{m\Theta}$ verschwinden. Es ist

$$\zeta_{m\Theta} = \zeta_{m0} + \frac{1}{4}\zeta_a .$$

Oder mit oben errechneten Werten

$$\zeta_{m\Theta} = -\frac{\pi}{4}\nu_2 + \frac{1}{4}\pi\nu_1 = \frac{\pi}{4}(\nu_1 - \nu_2) .$$

Man erhält also einen festen Druckpunkt, wenn

$$\nu_2 = \nu_1$$

wird. Die übrigen $\nu_n (n > 2)$ können frei gewählt werden. Sind diese $\nu_n (n > 2) = 0$, so ist

$$y = \frac{\nu_1}{2}(1 - x^2)\left(1 - \frac{4}{3}x\right) \qquad \left(\nu(-1) = +\frac{7}{3}\nu_1 ; \quad \nu(+1) = +\frac{1}{3}\nu_1\right)$$

das entsprechende druckpunktfeste Profil. Seine Anstellung für glatte Umströmung ist

$$\nu_0 = \frac{\nu_1}{3} .$$

Die Richtung der ersten Achse ist von dieser um $\frac{\nu_1}{2}$ verschieden, so daß die Richtung der auftriebfreien Anströmung um $\frac{\nu_1}{6}$ von der Profilsehne abweicht.

IX. Geschwindigkeitsverteilung bei beliebiger Anströmung. Bei beliebiger Anströmung ändert sich die Lage des vorderen Verzweigungspunktes. Es sei δ die Anstellung gegenüber der Anströmrichtung der glatten Umströmung. Dann wandert am Bildkreis die Lage des vorderen Verzweigungspunktes um 2δ. Lag dieser also unseren Voraussetzungen entsprechend in $\alpha = \pi$, so liegt er nach weiterer Anstellung in $\alpha = \pi + 2\delta$. Die Richtung der Strömung ist nun zwischen dem alten (E_0) und dem neuen (E_δ) Staupunkt um π von der Richtung der glatten Umströmung verschieden. Dem ursprünglichen Isoklinen- und Isotachenbild $\mu(\zeta)$ der Profilströmung in der Bildkreisebene muß also noch ein weiteres $\mu_\delta(\zeta)$ überlagert werden, von dem zwei ν-Linien, die um π verschiedene Argumente haben, mit dem Bildkreis zusammenfallen.

Man sieht leicht ein, daß $\mu_\delta(\zeta)$ durch die Potential- und Stromlinien zweier Wirbel von der Zirkulation $\Gamma_{E_0} = -2\pi$ bzw. $\Gamma_{E\delta} = +2\pi$ gebildet wird, die ihren Sitz in E_0 bzw. E_δ haben. Hieraus läßt sich $\ln\frac{w_\delta}{w_0}$ der zusätzlichen Strömung bestimmen. Nach einigen Umformungen findet man hiermit die Geschwindigkeitsverteilung bei der Anstellung δ gegenüber der Geschwindigkeitsverteilung bei glatter Umströmung:

$$w_\delta = w_0 \cos\delta \left[1 \pm \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\delta\right]$$

oder mit dem für w_0 gefundenen Werte:

$$\frac{w_\delta}{w_\infty} = \left[1 + \nu_1 \sin\alpha - \nu_2 \sin 2\alpha + . - \ldots\right] \cos\delta \left[1 \pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\delta\right] .$$

Als Vorzeichen der Wurzel wählt man auf der Saugseite $+$, auf der Druckseite $-$, entsprechend der Vermehrung bzw. Verminderung der Geschwindigkeit auf den entsprechenden Profilseiten. Als Beiwerte für Auftrieb und Moment findet man hiermit

$$\zeta_a = 2\pi\sin\delta + \pi\cdot\nu_1 = 2\pi\sin(\delta + \nu_1) ,$$

$$\zeta_{m\Theta} = \frac{\pi}{4}(\nu_1 - \nu_2) .$$

Die zweidimensionale Wärmeströmung des Beharrungszustandes im rechteckigen Querschnitt geblätterter Eisenkörper bei flächenhaft, unstetig oder stetig verteilten Wärmequellen*).

Von *Herbert Buchholz* in Berlin.

Die vorliegende Arbeit behandelt einige technische Beispiele für die zweidimensionale Wärmeströmung in anisotropen Körpern mit rechteckigem Querschnitt. Über die in allen Querschnitten gleichartige Verteilung der Wärmequellen wird in Übereinstimmung mit den wichtigsten praktischen Fällen angenommen, daß sie nur nach einer der beiden Hauptrichtungen variabel ist, dann aber auch unstetig, während sie nach der andern Richtung konstant ist. Als Grundlösung für die verschiedenen Beispiele dient die Beziehung für die Temperaturverteilung, die eine einzelne, zu einer der Seitenflächen parallele, flächenhafte Quelle in dem rechteckigen Querschnitt des Körpers erzeugt. Diese Lösung wird mittels komplexer Integration hergestellt und aus ihr die verschiedenen für die numerische Berechnung geeigneten Reihenentwicklungen abgeleitet. Zum Schluß wird noch ein Zahlenbeispiel angegeben.

Die Berechnung der stationären Temperaturverteilung in dem geblätterten Eisenkörper elektrischer Maschinen führt nach Vornahme einiger naheliegender Vereinfachungen auf eine Aufgabe der zweidimensionalen Wärmeströmung in einem rechteckigen Querschnitt. Abgesehen von der Anisotropie ist für sie vor allem charakteristisch das gleichzeitige Auftreten flächenhafter und stetig verteilter Wärmequellen. Um die Daten der Aufgabe möglichst deutlich vor Augen zu führen, mögen sie an Hand von Abb. 1 kurz besprochen werden.

Das Bild stellt einen Meridianschnitt durch ein mittleres Eisenpaket des Ständers von der Breite $2b$ dar. Die Richtung der y-Achse im Bilde verläuft dabei parallel zur Maschinenachse. Die x-parallele Schraffur deutet die Blätterung des Eisens an. Am linken Rande des Querschnitts auf der dem Luftspalt zwischen Ständer und Läufer zugewandten Seite ist der als nicht unterteilt vorausgesetzte Kupferstab einer Ständernut eingezeichnet. Die an den vier Kanten stehenden Buchstaben μ bringen die Gleichheit oder Verschiedenheit der an den zugehörigen Flächen geltenden Wärmeabgabeziffern zum Ausdruck. Die Diagramme über und links neben jedem Querschnitt geben die angenommene Verteilung der Wärmequellen in der x- oder y-Richtung wieder.

Abb. 1.

Mit diesen Daten enthält die Aufgabe verschiedene andere, einfachere Probleme als Spezialfälle. Unter diesen verdient besondere Erwähnung das Beispiel der Temperaturverteilung im Querschnitt der Kernsäule eines Transformators. Die Vereinfachungen der obigen Problemstellung betreffen in diesem Falle einmal die mit konstanter Ergiebigkeit über den Querschnitt verteilten Wärmequellen, zum anderen die an allen Kanten praktisch gleichgroße Wärmeabfuhr. Die mathematische Formulierung der Aufgabe wird natürlich nur die anfangs besprochene, kompliziertere Aufgabe berücksichtigen. Die notwendigen Vereinfachungen werden erst hinterher an der zugehörigen Lösung vorgenommen werden.

In dem allgemeinen Falle darf wegen des in der y-Richtung konstanten Magnetfeldes die Ergiebigkeit der Wärmequellen q als von y unabhängig angesehen werden. Im Innern eines jeden Querschnitts hat dann die Temperatur $\Theta(x, y)$, die auf die überall als gleichgroß vorausgesetzte Temperatur des kühlenden Mittels bezogen werden möge, zunächst die Bedingung[1]) zu erfüllen:

$$\lambda_x \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \lambda_y \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + q(x) = 0 \quad \text{. . . . . (1).}$$

*) Wissenschaftliche Mitteilung der AEG.

[1]) Die Aufgabe könnte nach der gleichen Methode auch noch in dem Falle gelöst werden, daß für das Kupfer eine endliche, vom Eisen verschiedene Wärmeleitfähigkeit in Rechnung gestellt wird. Die Beziehungen würden dann allerdings sehr kompliziert werden.

Die gleiche Aufgabe wurde unter der Voraussetzung $\lambda_x \to \infty$ als eindimensionales Problem behandelt von O. Böhm: Vorausberechnung der Erwärmung elektrischer Maschinen, ETZ. Bd. 43, 1922, S. 810. — E. Roth: Etude analytique de l'échauffement des machines électriques, Bull. de la Soc. franc. des Electriens, Ser. 4, Vol. 7, 1927, p. 840 . . . 966.

Hierin bedeuten λ_x und λ_y die beiden Wärmeleitfähigkeiten in W/cm °C in der x- und y-Richtung. An den zur x-Achse parallelen Begrenzungslinien des Querschnitts sind die beiden Wärmeübergangszahlen μ_y in W/cm² °C gleichgroß. Die Temperaturverteilung ist dann gewiß zur x-Achse symmetrisch, und es muß daher gelten:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \qquad (|x| \lesseqgtr a,\ y = 0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a),$$

$$\mu_y \, \Theta(x, \pm b) \pm \lambda_y \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \qquad (|x| \lesseqgtr a,\ y = \pm b) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1b).$$

In bezug auf die y-Achse ist dagegen die Temperatur sicherlich unsymmetrisch verteilt. An der rechten äußeren Kante muß nämlich die Grenzbedingung (1c) erfüllt sein.

$$\mu_{x_2} \cdot \Theta(+a, y) + \lambda_x \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \qquad (|y| \lesseqgtr b,\ x = +a) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1c)$$

An der linken Querschnittskante lautet aber die entsprechende Grenzbedingung wegen der Anwesenheit des selbst wärmeerzeugenden Kupferstabes ganz anders. Um weitläufige Rechnungen zu vermeiden, kann für den Kupferstab wegen seiner nur kleinen Abmessung in der x-Richtung und wegen der großen Wärmeleitfähigkeit des Kupfers eine örtlich konstante Temperatur Θ_0 angenommen werden. Bezeichnet dann Q die Ergiebigkeit der Wärmequellen im Kupfer in W/cm³ und d in cm die Breite des Kupferstabes, so folgt aus dem Energieprinzip zunächst die Gl. (2a). Ist andererseits e die gegenüber d sehr geringe Dicke der Isolation zwischen Eisen und Kupfer und λ_r deren resultierende Wärmeleitfähigkeit wiederum in W/cm °C, so besteht nach der Definition von λ die Gl. (2b):

$$Q \cdot d = \mu_{x_1} \Theta_0 - \lambda_x \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2a),$$

$$\lambda_r \cdot [\Theta_0 - \Theta(-a, y)] : e = -\lambda_x \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} \qquad (|y| \lesseqgtr b,\ x = -a) \quad \ldots \ldots \quad (2b).$$

Eliminiert man aus beiden Formeln die vorläufig nicht interessierende Kupfertemperatur, so gilt für den Wärmestrom im Eisen an der dem Luftspalt zugewandten Seite als vierte Grenzbedingung die Gl. (1d):

$$\mu'_{x_1} \cdot \Theta(-a, y) - \lambda_x \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} = Q' \cdot d \qquad (|y| \lesseqgtr b,\ x = -a) \quad \ldots \ldots \quad (1d),$$

$$\left.\begin{matrix} \mu'_{x_1} = \mu_{x_1} \\ Q' = Q \end{matrix}\right\} : \left[1 + \frac{e\,\mu_{x_1}}{\lambda_r}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1\delta).$$

Die Isolation zwischen Kupfer und Eisen setzt also einmal für das Eisen die Möglichkeit der Wärmeabgabe an die Luft herab, andererseits verringert sie aber auch die Erwärmung des Eisens durch die Wärmequellen im Kupfer, zwei Wirkungen der Isolation, die durchaus plausibel sind.

Zwecks Lösung dieser Gleichungen empfiehlt sich zunächst die Zerlegung der physikalisch einheitlichen Temperatur des Querschnitts in zwei Komponenten Θ_1 und Θ_2. Die erste Komponente Θ_1 soll allein von den Wärmequellen im Eisen herrühren. Für diese Temperatur werden demnach die Gl. (1 ... 1d) bestehen müssen mit der einzigen Abänderung, daß in (1d) $Q' = 0$ zu setzen ist. Die zweite Temperaturkomponente möge dagegen lediglich durch die Wärmequellen im Kupfer erzeugt werden. Für Θ_2 gelten mithin die Gl. (1 ... 1d) mit $q(x) = 0$. Die beiden Temperaturfelder unterscheiden sich also im wesentlichen nur dadurch, daß in bezug auf das Eisen die Erzeugung des Feldes Θ_1 durch räumlich verteilte Quellen, die des Feldes Θ_2 dagegen durch eine flächenhafte Quelle verursacht wird.

Die Ausdrücke für die beiden Temperaturfelder Θ_1 und Θ_2 lassen sich aus der Lösung einer einzigen neuen Aufgabe herleiten. Dieses Ersatzproblem betrifft die Berechnung der Temperaturverteilung ϑ in dem gegebenen rechteckigen Querschnitt unter den Bedingungen (1 ... 1d), wenn in (1) und (1d) zwar $q(x) = 0$ und $Q = 0$ sind, dafür aber an der beliebigen Stelle $x = s$ mit $-a < s < +a$ eine schichtförmige, flächenhafte Quelle mit der Ergiebigkeit 1 liegt. Zu den schon bestehenden Bedingungsgleichungen (1 ... 1d) für die Temperaturverteilung, die nur entsprechend dem Übergang von Θ zu ϑ und dem Verschwinden von $q(x)$ und Q zu verändern sind, treten dann noch die beiden folgenden hinzu:

$$\vartheta(s; s-0, y) = \vartheta(s; s+0, y) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1e),$$

$$\lambda_x \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=s-0} - \lambda_x \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=s+0} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1f).$$

Das System (1) von Bedingungsgleichungen für die Temperatur $\vartheta(x, y)$ kann noch bequemer formuliert werden durch Benutzung eines anderen Koordinatensystems. Setzt man nämlich

$$x = \xi \cdot \sqrt[4]{\lambda_x / \lambda_y} \quad . \; . \; . \quad (3a), \qquad y = \eta \cdot \sqrt[4]{\lambda_y / \lambda_x} \quad . \; . \; . \quad (3b), \qquad \lambda_m = \sqrt{\lambda_x \cdot \lambda_y} \quad . \; . \; . \; . \quad (3c),$$

$$\bar{\mu}_y = \mu_y \cdot \sqrt[4]{\lambda_x / \lambda_y} \quad . \; . \; . \quad (3d), \qquad \bar{\mu}_x = \mu_x \cdot \sqrt[4]{\lambda_y / \lambda_x} \quad . \; . \; . \quad (3e),$$

so hat das neue Gleichungssystem für ϑ die folgende, für die Lösung bequemere Gestalt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a), \qquad \bar{\mu}_y \cdot \vartheta(\sigma; \xi, \pm\beta) \pm \lambda_m \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = \pm\beta). \quad (4b),$$

$$\bar{\mu}_{x_2} \cdot \vartheta(\sigma; +a, \eta) + \lambda_m \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = +a) \quad (4c). \qquad \bar{\mu}'_{x_1} \cdot \vartheta(\sigma; -a, \eta) - \lambda_m \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = -a) \quad (4d),$$

$$\vartheta(\sigma; \sigma-, \eta) = \vartheta(\sigma; \sigma+, \eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4e), \qquad \lambda_m \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{\xi = \sigma-} - \lambda_m \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_{\xi = \sigma+} = \sqrt[4]{\lambda_y / \lambda_x} \quad (4f).$$

In diesen Gleichungen stehen entsprechend (3a, b) für a, b, s die Zeichen a, β, σ. Die vorgenommene Koordinatentransformation hat die Bedeutung einer Streckung oder Schrumpfung aller Abmessungen in der x- und y-Richtung im Verhältnis $\sqrt[4]{\lambda_y / \lambda_x}$ oder $\sqrt[4]{\lambda_x / \lambda_y}$ unter Wahrung des gleichen Flächeninhalts für den Querschnitt. Die Ergiebigkeit der Quellen bleibt dann bei dem Übergang von dem einen zum anderen Koordinatensystem unverändert. Die Streckung dagegen verändert sowohl den Zahlenwert der Wärmeabgabeziffern als auch den der Wärmeleitfähigkeiten, und zwar diese letzteren absichtlich in dem Sinne, daß beide für die x- und y-Richtung des Querschnitts gerade gleich λ_m werden.

Die vollständige Lösung des Gleichungssystems (4) wird aus zwei Funktionen bestehen, von denen die eine $\vartheta(\sigma; \xi, \eta)$ für $\xi < \sigma$ und die andere $\vartheta(\sigma, \xi; \eta)$ für $\sigma < \xi$ gültig ist. Hat im Koordinatensystem der x, y die bei $x = s$ gelegene Wärmequelle die Ergiebigkeit $q(s) \cdot ds$, so ist offenbar die Lösung des Systems (4) im Koordinatensystem der ξ, η mit $q(s) \cdot ds = q(\sigma) \cdot d\sigma \cdot \sqrt[4]{\lambda_x / \lambda_y}$ zu multiplizieren.

Aus der Lösung von (4) kann sofort das Verteilungsgesetz für die vordem eingeführte Temperaturkomponente Θ_1 gewonnen werden, denn diese sollte ja selbst von einer flächenhaften Wärmequelle herrühren, die nur nicht wie die Quelle $q(s)$ an einer beliebigen Stelle des Querschnitts liegt, sondern speziell an dessen linkem Rande. In diesem Falle lassen sich aber die drei Gl. (4d ... 4f) zu der einzigen neuen Grenzbedingung (4h) zusammenziehen:

$$\bar{\mu}_{x_1} \cdot \vartheta(a; a-, \eta) - \lambda_m \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \sqrt[4]{\lambda_y / \lambda_x} \quad (|\eta| \lessgtr \beta, \; \xi = -a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4h).$$

Man braucht also nur die Lösung von (4) für den speziellen Fall $\sigma = -a$ noch mit $Q' \cdot d$ zu vervielfachen, um gemäß (6) die gesuchte Temperaturkomponente Θ_2 zu erhalten:

$$\Theta_2(x, y) = Q' \cdot d \cdot \vartheta(-a; \xi, \eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Wird die Erwärmung wie bei der Komponente Θ_1 durch ein räumliches Quellgebiet $q(x)$ verursacht, so läßt sich auch die hierzugehörende Temperaturverteilung sofort aus der Lösung (4) gewinnen, und zwar durch eine einzige weitere Integration. Berechnet man nämlich $\Theta_1(\xi, \eta)$ nach der Vorschrift (5)

$$\Theta_1(\xi, \eta) = \sqrt[4]{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \int_{-a}^{\xi} \vartheta(\sigma; \xi, \eta) \cdot q(\sigma) \cdot d\sigma + \sqrt[4]{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \int_{\xi}^{+a} \vartheta(\sigma; \xi, \eta) \cdot q(\sigma) \cdot d\sigma \quad . \; . \; . \quad (5),$$

so erfüllt diese Funktion jedenfalls die entsprechend umzuschreibenden Bedingungen (4a ... 4d) und in Rücksicht auf (4e, f) statt der Laplaceschen Gl. (4) die Poissonsche Gl. (5a), die nach Übergang zum System der (x, y) mit (1) übereinstimmt. Mithin befriedigt die so hergestellte Funktion $\Theta_1(x, y)$

$$\lambda_m \cdot \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + \lambda_m \cdot \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \eta^2} + q(\xi) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5a)$$

tatsächlich alle Bedingungen der Aufgabe. Den Gl. (5) und (6) zufolge sind also die gesuchten beiden Temperaturen Θ_1 und Θ_2 bekannt, sobald die Lösung des Gleichungssystems (4) vorliegt.

Die Lösung von (4) kann am einfachsten mit Hilfe der komplexen Integration[2]) erzielt werden. Als Lösungsansätze mögen die beiden folgenden Ausdrücke dienen:

$$\vartheta(\sigma;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)}\{A(u)\cdot\cos u\,\xi+B(u)\cdot\sin u\,\xi\}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,u\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,u\,\beta+u\,k_y\cdot\mathfrak{Sin}\,u\,\beta}\cdot du\qquad(\xi<\sigma)\quad.\quad(7\text{a}),$$

$$\vartheta(\sigma;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)}\{C(u)\cdot\cos u\,\xi+D(u)\cdot\sin u\,\xi\}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,u\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,u\,\beta+u\,k_y\cdot\mathfrak{Sin}\,u\,\beta}\cdot du\qquad(\xi>\sigma)\quad.\quad(7\text{b}),$$

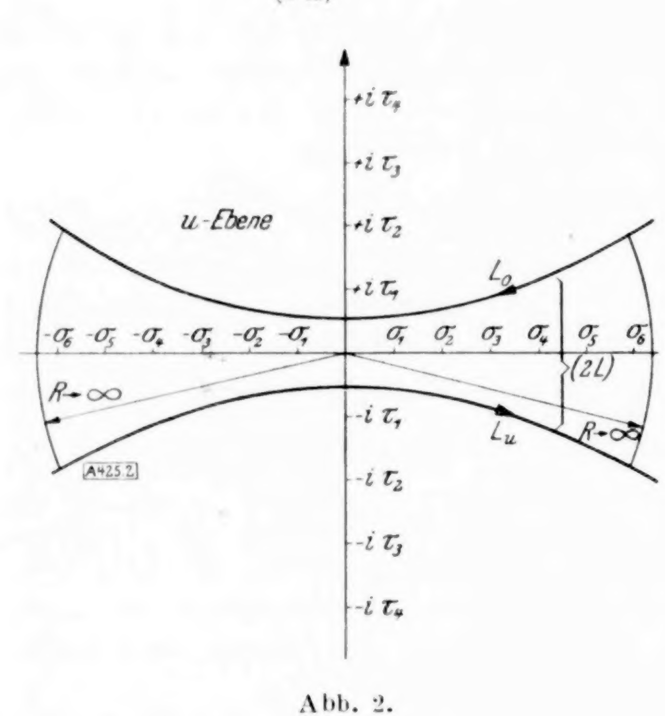


Abb. 2.

worin k_y gemäß (8a) definiert ist. $(2\,L)$ bedeutet den in Abb. 2 dargestellten Integrationsweg der u-Ebene, der aus zwei nach beiden Seiten ins Unendliche

$$k_y=\lambda_m\,|\,\overline{\mu}_y\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(8\text{a}),$$

$$k_{x\,1}=\lambda_m\,|\,\overline{\mu}_{x\,1}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(8\text{b}),$$

$$k_{x\,2}=\lambda_m\,|\,\overline{\mu}_{x\,2}\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(8\text{c})$$

auslaufenden und etwa zur x- und y-Achse symmetrischen Kurven besteht. Selbstverständlich müssen die beiden in (7) vorkommenden Integrale, wenn der Ansatz überhaupt einen Sinn haben soll, zunächst als konvergent vorausgesetzt werden, und erst später kann nachgeprüft werden, ob diese Voraussetzung auch tatsächlich zutrifft. Aus demselben Grunde darf keine der geschweiften Klammern eine gerade Funktion enthalten, weil sonst das Integral identisch verschwände. Die bisher allein angebbaren Pole der beiden Integranden liegen an den Stellen $u=\pm\,i\cdot\tau_p$, wo τ_p die positiven Wurzeln der Gl. (9a) sind. Über deren Lage zu den Schnittpunken des Weges $(2\,L)$ mit der y-Achse kann und soll jedoch vorläufig nichts ausgesagt werden.

$$\operatorname{ctg}\tau_p=\frac{k_y}{\beta}\cdot\tau_p=\frac{h_y}{b}\cdot\bar{\tau}_p\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(9\text{a}),\qquad\bar{\tau}_p=\beta\cdot\tau_p\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(9\alpha).$$

Die beiden Ansätze (7) erfüllen von den sieben Bedingungen, die das Gleichungssystem (4) enthält, vorerst auf jeden Fall die Gl. (4) und (4a), die Gl. (4b) aber nur dann, falls z. B. für (7a) die

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)}\{A(u)\cos u\,\xi+B(u)\cdot\sin u\,\xi\}=0\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(7')$$

Beziehung (7′) bestehen sollte. Drei weitere Bedingungen können aber sehr leicht ohne Einschränkung dadurch befriedigt werden, daß man jeweils nach Zusammenfassung aller Glieder die geschweifte Klammer gleich null setzt. Damit die so entstehenden Gleichungen, die als Bestimmungsgleichungen für die vier unbekannten Funktionen $A\,(u)$ usw. aufzufassen sind, möglichst kurz angeschrieben werden können, mögen schon an dieser Stelle die folgenden vier Abkürzungen[3]) eingeführt werden:

$$n_{10}(u,a)=\cos u\,a-u\cdot k'_{x\,1}\cdot\sin u\,a\quad.\quad(10\text{a}),\qquad n_{11}(u,a)=\sin u\,a+u\cdot k'_{x\,1}\cdot\cos u\,a\quad.\quad(10\text{c}),$$

$$n_{20}(u,a)=\cos u\,a-u\cdot k_{x\,2}\cdot\sin u\,a\quad.\quad(10\text{b}),\qquad n_{21}(u,a)=\sin u\,a+u\cdot k_{x\,2}\cdot\cos u\,a\quad.\quad(10\text{d}).$$

Die Berücksichtigung der drei Bedingungen (4c ... e) führt mit Benutzung dieser Abkürzungen zu den folgenden drei Gleichungen:

$$A\,(u)\cdot n_{10}\,(u,a)-B\,(u)\cdot n_{11}\,(u,a)=0\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(11\text{a}),$$

$$C\,(u)\cdot n_{20}\,(u,a)-D\,(u)\cdot n_{21}\,(u,a)=0\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad(11\text{b}).$$

$$A\,(u)\cdot\cos u\,\sigma+B\,(u)\cdot\sin u\,\sigma-C\,(u)\cos u\,\sigma-D\,(u)\sin u\,\sigma=0.\quad.\quad.\quad.\quad(11\text{c}).$$

[2]) Über die erstmalige Anwendung dieser Methode vgl. man I. T. Bromwich: Proc. London Math. Soc., 2 Ser., Vol. 30, 1930, p. 165 .... 177.

[3]) Von den beiden Zeigern des Buchstabens n stimmt immer der erste mit dem Zeiger von k_x überein, der zweite charakterisiert die Funktion als gerade (0) oder ungerade (1).

Um auch die letzte der Grenzbedingungen zu erfassen, müßte nach (4f) und (7a, b) für jedes η die Beziehung gelten:

$$\frac{\sqrt[4]{\lambda_y/\lambda_x}}{\lambda_m} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)} \frac{u\cdot du\cdot \mathfrak{Cos}\, u\eta}{\mathfrak{Cos}\, u\beta + u\cdot k_y\cdot \mathfrak{Sin}\, u\beta}\cdot\{-A(u)\sin u\sigma + B(u)\cos u\sigma + C(u)\sin u\sigma - D(u)\cos u\sigma\}.$$

Setzt man hierin die geschweifte Klammer versuchsweise gleich const$/u^2$, so entsteht zunächst

$$\frac{\sqrt[4]{\lambda_x/\lambda_y}}{\lambda_m} = \frac{\text{const}}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)} \frac{\mathfrak{Cos}\, u\eta}{\mathfrak{Cos}\, u\beta + u\cdot k_y\cdot \mathfrak{Sin}\, u\beta}\cdot\frac{du}{u}.$$

Da in diesem Ausdruck der Integrand für alle $|\eta| < \beta$ und alle $\mathrm{Re}(u) \neq 0$ absolut konvergiert, so darf in Abb. 2 der Weg $(2L)$ etwa durch die beiden die x-Achse schneidenden Kreisbögen von sehr großem Radius R zu einem geschlossenen Kurvenzug ergänzt werden, ohne daß sich für $R \to \infty$ der Wert des obenstehenden Integrals verändert. Wird dann ein für allemal die Verabredung getroffen, daß abgesehen von $u = 0$ die Pole $\pm i\cdot\tau_p$ des obigen Integranden alle oberhalb des oberen und unterhalb des unteren Wegteils von $(2L)$ liegen, mit anderen Worten der Weg $(2L)$ die y-Achse zwischen den beiden kleinsten Polen $\pm i\cdot\tau_1$ schneidet, so läßt sich nach dem Residuensatz die obige Bedingung erfüllen, wenn const $= \frac{\sqrt[4]{\lambda_y/\lambda_x}}{\lambda_m}$ gesetzt wird. Die Forderung (4f) ist demnach befriedigt, falls zwischen den vier Funktionen $A(u)$ usw. noch die weitere, vierte Gl. (11d) besteht:

$$-A(u)\cdot\sin u\sigma + B(u)\cdot\cos u\sigma + C(u)\cdot\sin u\sigma - D(u)\cdot\cos u\sigma = \frac{\sqrt[4]{\lambda_y/\lambda_x}}{\lambda_m}\cdot\frac{1}{u^2} \quad . \quad . \quad (11\text{d}).$$

Die Gl. (11a...d) reichen hin, die vier unbekannten Funktionen $A \ldots D$ zu berechnen. Setzt man die errechneten Ausdrücke sofort in den Ansatz (7a, b) ein, so erhält man als Integraldarstellung für die Temperaturverteilung infolge der bei $\xi = \sigma$ gelegenen flächenhaften Wärmequelle die beiden Beziehungen:

$$\vartheta(\sigma;\xi,\eta) = \frac{\sqrt[4]{\lambda_y/\lambda_x}}{\lambda_m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)} \frac{n_{21}(u, a-\sigma)\cdot n_{11}(u, a+\xi)}{u^2\cdot\Delta_1(u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\, u\eta}{\mathfrak{Cos}\, u\beta + u k_y\cdot\mathfrak{Sin}\, u\beta}\cdot du \quad (\xi < \sigma) \quad (12\text{a}),$$

$$\vartheta(\sigma;\xi,\eta) = \frac{\sqrt[4]{\lambda_y/\lambda_x}}{\lambda_m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)} \frac{n_{21}(u, a-\xi)\cdot n_{11}(u, a+\sigma)}{u^2\cdot\Delta_1(u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\, u\eta}{\mathfrak{Cos}\, u\beta + u k_y\cdot\mathfrak{Sin}\, u\beta}\cdot du \quad (\xi > \sigma) \quad (12\text{b}),$$

worin zur Abkürzung die ungerade Funktion $\Delta_1(u)$ gemäß (12) bestimmt ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1(u) &= n_{10}(u,a)\cdot n_{21}(u,a) + n_{11}(u,a)\cdot n_{20}(u,a)\\ &= (1 - k'_{x_1}\cdot k_{x_2}\cdot u^2)\cdot\sin 2ua + (k'_{x_1} + k_{x_2})\cdot u\cdot\cos 2ua\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die beiden Lösungsintegrale (12a, b) des Gleichungssystems (4) sind tatsächlich entsprechend der eingangs erwähnten Voraussetzung auf dem gewählten Integrationsweg absolut konvergent. Ebenso ist auch die Bedingung (7') erfüllt, denn die beiden Wegbestandteile von $(2L)$ können in diesem Fall, wie in Abb. 2 angedeutet ist, nach oben und unten durch zwei Kreisbögen von sehr großem Radius zu geschlossenen Wegen ergänzt werden, in deren Innern der zugehörige Integrand singularitätenfrei ist. Schließlich befriedigen die Lösungen (12a, b) auch die Differentialgleichung (4), denn durch das Einsetzen von (12a, b) in (4) entstehen identisch verschwindende Integranden. Die Gl. (12) stellen demnach tatsächlich die richtige Lösung des durch das Gleichungssystem (4) definierten Temperaturfeldes dar. Nach einer bekannten Beweisführung ist sie dann zugleich auch die einzige Lösung.

Aus der Integraldarstellung (12) kann sehr leicht eine für die numerische Berechnung geeignete Reihenentwicklung gewonnen werden. Die Möglichkeit dazu bietet der Residuensatz. Seine Benutzung hätte in dem allgemeinen Falle von (12), wo die Temperaturquelle an einer beliebigen Stelle σ liegt, in ganz derselben Weise zu erfolgen wie in den gleich zu behandelnden speziellen Fällen. Aus diesem Grunde soll auf die Herleitung der Reihen-

entwicklungen aus (12) für eine beliebig gelegene Temperaturquelle verzichtet und diese Beziehung sofort auf die Bestimmung der Temperaturkomponente $\Theta_2(x, y)$ angewendet werden. In Rücksicht auf (6) und (12b) ergibt sich zunächst wegen $n_{11}(u, 0) = u\, k'_{x1}$

$$\Theta_2(x, y) = \frac{Q' \cdot d}{\mu'_{x1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{(2L)} \frac{n_{21}(u, a-\xi)}{u \cdot \Delta_1(u)} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, u\eta}{\mathfrak{Cof}\, u\beta + u \cdot k_y \cdot \mathfrak{Sin}\, u\beta} \cdot du \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Um von (13) aus zu einer geeigneten Reihenentwicklung zu gelangen, ist nur erforderlich, den Integrationsweg in (13) auf die reelle Achse zusammenzuziehen und die Residuen für die dort liegenden Pole zu berechnen. Für den Pol $u = 0$ ist das Residuum abgesehen von dem ersten Faktor vor dem Integralzeichen von (13) durch den Ausdruck (14) gegeben:

$$\frac{a - \xi + k_{x2}}{2\sigma + k'_{x1} + k_{x2}} = \frac{a - x + h_{x2}}{2a + h'_{x1} + h_{x2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

$$h'_{x1} = \lambda_x / \mu'_{x1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\alpha), \qquad h_m = \lambda_m / \mu_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\gamma),$$

$$h_{x2} = \lambda_x / \mu_{x2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\beta), \qquad h_y = \lambda_y / \mu_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14\delta).$$

Der Integrand von (13) besitzt aber außerdem noch eine unendliche Folge von rein reellen Polen an den Stellen $u = \pm\, \sigma_p$ mit $p = 1, 2, 3 \ldots$, deren Lage die Gl. (9b) festlegt. Aus der bekannten graphischen Darstellung beider Gleichungsseiten zur angenäherten Bestimmung der Wurzeln ergibt sich für die Lage der Wurzeln die Ungleichung $(p-1) \cdot \pi/2 < \bar{\sigma}_p < p \cdot \pi/2$ mit der genaueren Angabe $\bar{\sigma}_p \to (p-1) \cdot \pi/2$ für $p \to \infty$. Andererseits besteht

$$\operatorname{ctg} 2\bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_p \cdot \frac{\dfrac{h'_{x1}}{a} \cdot \dfrac{h_{x2}}{a}}{\dfrac{h'_{x1}}{a} + \dfrac{h_{x2}}{a}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_p} \cdot \frac{1}{\dfrac{h'_{x1}}{a} + \dfrac{h_{x2}}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\mathrm{b}), \qquad \bar{\sigma}_p = a \cdot \sigma_p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\beta)$$

für die erste Ableitung von $\Delta_1(u)$ nach u an einer Nullstelle die Beziehung (15):

$$\Delta'_1(\sigma_p) = -a \cdot N(\bar{\sigma}_p) = -a \cdot \left[\left(\frac{h'_{x1}}{a} + \frac{h_{x2}}{a}\right) \frac{2\bar{\sigma}_p}{\sin 2\bar{\sigma}_p} + 2 \cdot \left(1 + \frac{h'_{x1}}{a} \cdot \frac{h_{x2}}{a} \cdot \bar{\sigma}_p^2\right) \cdot \frac{\sin 2\bar{\sigma}_p}{2\bar{\sigma}_p}\right] \quad . \quad . \quad (15).$$

Im ganzen erhält man damit aus (13) für die Temperaturverteilung $\Theta_2(x, y)$, die durch eine am linken Rande gelegene Wärmequelle in dem rechteckigen Querschnitt verursacht wird, die folgende Reihendarstellung (13a):

$$\Theta_2(x, y) = \frac{Q \cdot d}{\mu_{x1}} \cdot \left\{ \left[\frac{1 - \dfrac{x}{a} + \dfrac{h_{x2}}{a}}{2 + \dfrac{h'_{x1}}{a} + \dfrac{h_{x2}}{a}} - 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \bar{\sigma}_p \left(1 - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{h_{x2}}{a} \cdot \bar{\sigma}_p \cdot \cos \bar{\sigma}_p \left(1 - \dfrac{x}{a}\right)}{\bar{\sigma}_p \cdot N(\bar{\sigma}_p)} \right. \right.$$
$$\left. \left. \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\dfrac{y}{b} \cdot \dfrac{b}{a} \sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\dfrac{b}{a} \sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right) + \dfrac{h_m}{a} \cdot \bar{\sigma}_p \cdot \mathfrak{Sin}\left(\dfrac{b}{a} \sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right)} \right] \right\} \quad . \quad . \quad (13\mathrm{a}).$$

Geht in (13a) $b \to \infty$ oder $\lambda_y \to 0$, so verschwindet in beiden Fällen der zweite Bruch jedes Summengliedes. Die erste Zeile von (13a) gibt also die Temperaturverteilung an, die durch eine flächenhafte Wärmequelle am linken Rande des rechteckigen Querschnitts erzeugt wird, wenn entweder die Höhe des Rechtecks parallel zu dieser Kante unendlich groß ist oder aber die Wärmeleitfähigkeit in dieser Richtung verschwindet.

Die Berechnung der Temperaturkomponente $\Theta_1(x, y)$, die nach den früheren Ausführungen von den Wärmequellen im Eisen selbst herrühren sollte, möge unter der speziellen Annahme erfolgen, daß die Ergiebigkeit $q(\sigma)$ der Wärmequellen in (5) im ganzen Querschnitt konstant gleich q ist. Geht man mit den Ausdrücken (12) in (5) ein, so ergibt sich zunächst

$$\Theta_1(\xi,\eta) = \frac{1}{\lambda_m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)} \frac{n_{21}(u,a-\xi)\cdot[1-n_{10}(u,a+\xi)] + n_{11}(u,a+\xi)\cdot[1-n_{20}(u,a-\xi)]}{u^3\cdot\Delta_1(u)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,u\eta}{\mathfrak{Cof}\,u\beta + u\,k_y\cdot\mathfrak{Sin}\,u\beta}\cdot du\,.$$

Aus dem Zähler des ersten Bruches im Integranden läßt sich jedoch in Rücksicht auf (10) und (12) das Glied $\Delta_1(u)$ herausziehen. Für die Temperaturverteilung $\Theta_1(\xi,\eta)$, die von einem gleichmäßigen Wärmequellenbelag des rechteckigen Querschnitts herrührt, gelangt man danach zu der folgenden Integraldarstellung:

$$\Theta_1(x,y) = \frac{q}{\lambda_m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{(2L)}\left\{\frac{n_{21}(u,a-\xi)+n_{11}(u,a+\xi)}{\Delta_1(u)} - 1\right\}\frac{\mathfrak{Cof}\,u\eta}{\mathfrak{Cof}\,u\beta + u\,k_y\cdot\mathfrak{Sin}\,u\beta}\,\frac{du}{u^3} \quad (17).$$

Die Umwandlung von (17) in eine für die numerische Berechnung geeignete Reihe kann auf die gleiche Weise vorgenommen werden wie beim Integral (13). Auch in (17) ist der Nullpunkt nur ein Pol erster Ordnung. Sein Residuum ist mit Einschluß des Faktors q/λ_m gleich der ersten Zeile von (17a). Über die Lage der übrigen Pole gilt das gleiche wie früher. Alles in allem entsteht damit für die Temperaturverteilung $\Theta_1(x\cdot y)$ innerhalb des gleichmäßig beheizten rechteckigen Querschnitts die folgende Reihendarstellung:

$$\left.\begin{aligned}\Theta_1(x,y) = \frac{a^2\cdot q}{2\,\lambda_x}\cdot\Bigg[3 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\cdot\frac{2\left(1-\frac{h'_{x1}\cdot h_{x2}}{a^2}\right)+\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{h'_{x1}}{a}-\frac{h_{x2}}{a}\right)}{2+\frac{h'_{x1}}{a}+\frac{h_{x2}}{a}}\,-\\ -4\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_{21}(\sigma_p,a-\xi)+n_{11}(\sigma_p,a+\xi)}{\bar\sigma_p^{\,3}\cdot N(\bar\sigma_p)}\,\frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{b}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\bar\sigma_p\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\sigma_p\right)+\frac{h_m}{a}\cdot\bar\sigma_p\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\bar\sigma_p\right)}\Bigg]\end{aligned}\right\}\,.\quad (17\text{a}),$$

worin im vorliegenden Falle gemäß (10c, d) für die beiden Zählerfunktionen in der unendlichen Reihe geschrieben werden kann:

$$n_{21}(\sigma_p,a-\xi) = \sin\bar\sigma_p\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{h_{x2}}{a}\cdot\bar\sigma_p\cdot\cos\bar\sigma_p\left(1-\frac{x}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17\alpha),$$

$$n_{11}(\sigma_p,a+\xi) = \sin\bar\sigma_p\left(1+\frac{x}{a}\right)+\frac{h'_{x2}}{a}\cdot\bar\sigma_p\cdot\cos\bar\sigma_p\left(1+\frac{x}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17\beta).$$

Die erste Zeile von (17a) allein bedeutet wie vorher die Temperaturverteilung, die sich bei örtlich konstanter Ergiebigkeit der Quellen einstellen würde, falls der Körper entweder in der Richtung der y-Achse unendlich lang wäre oder in dieser Richtung keine Wärmeleitfähigkeit besäße. Die in Wirklichkeit von null verschiedene Wärmeleitfähigkeit λ_y verringert natürlich überall die auftretende Temperatur. Tatsächlich ist auch in den Reihen (13a) und (17a) das erste und größte Reihenglied negativ, da σ_1 kleiner ist als $\pi/2$.

Von besonderem Interesse sind die Beziehungen für den W ä r m e f l u ß, der in den behandelten beiden Fällen aus dem linken Rande des Querschnitts, d. h. aus dem Sitz der Flächenquelle des Temperaturfeldes Θ_2, aus dem Eisen ausströmt. Da an dieser Stelle die beiden Wärmeflüsse im allgemeinen entgegengesetzte Richtung haben, ist es für manche Fragestellungen der Praxis von Interesse, die Richtung des resultierenden Wärmeflusses zu kennen. Im Falle der f l ä c h e n h a f t e n Wärmequelle ist nach (13a) der parallel der x-Achse aus dem Eisen austretende Wärmefluß

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x\cdot\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} = Q\cdot d\cdot\frac{h_{x1}}{a}\cdot\Bigg[-\frac{1}{2+\frac{h'_{x1}}{a}+\frac{h_{x2}}{a}}+2\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\cos 2\bar\sigma_p-(h_{x2}/a)\cdot\bar\sigma_p\cdot\sin 2\bar\sigma_p}{N(\bar\sigma_p)}\cdot\\ \cdot\frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{b}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\bar\sigma_p\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\bar\sigma_p\right)+\bar\sigma_p\cdot(h_m/a)\cdot\mathfrak{Sin}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\cdot\bar\sigma_p\right)}\Bigg]_{(x=-a)}\end{aligned}\right\}\,.\quad (18\text{a})$$

und nach (17a) derselbe Fluß im Falle gleichmäßig verteilter Quellen

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x \cdot \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = a \cdot q \cdot \Bigg[1 - \frac{\frac{h'_{x1}}{a} - \frac{h_{x2}}{a}}{2 + \frac{h'_{x1}}{a} + \frac{h_{x2}}{a}} - 2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2\bar{\sigma}_p + (h_{x2}/a) \cdot \bar{\sigma}_p \cdot \sin 2\bar{\sigma}_p}{\bar{\sigma}_p^2 \cdot N(\bar{\sigma}_p)} \cdot \\ \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{b} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right) + \bar{\sigma}_p \cdot (h_m/a) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_p\right)}\Bigg]_{(x=-a)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad (18b).$$

Nach Gl. (2a) ist außerdem die um $Q \cdot d$ vermehrte algebraische Summe beider Wärmeflüsse gleich dem Produkt aus der Wärmeabgabeziffer μ_{x1} und der Temperatur Θ_0 im Kupfer. Die Berechnung der beiden Wärmeflüsse (18a, b) liefert also zugleich die Temperatur des Kupferstabes.

Die Gl. (13) und (17) nebst ihren Abwandlungen vereinfachen sich wesentlich, wenn auch für die zur x-Achse senkrechten Flächen die Wärmeabgabeziffern einander gleich werden. In Rücksicht auf das wichtige Beispiel des Transformators, bei dem es sich obendrein nur um gleichmäßig verteilte Quellen handelt, brauchen deshalb die verschiedenen dadurch bewirkten Änderungen nur an der Gl. (17) weiter verfolgt zu werden. Für $k_{x1} = k_{x2}$ ergibt sich sofort aus (10) und (12)

$$n_{21}(u, a - \xi) + n_{11}(u, a + \xi) = 2 \cdot \cos u\xi \cdot (\sin u a + u \cdot k_x \cdot \cos u a)$$

$$\Delta_1(u) = 2 \cdot (\cos u a - u k_x \cdot \sin u a) \cdot (\sin u a + u \cdot k_x \cdot \cos u a).$$

Für die Temperaturverteilung im rechteckigen Querschnitt eines Transformators besteht mithin die folgende Integraldarstellung:

$$\Theta(x, y) = \frac{(q/\lambda_m)}{2\pi i} \cdot \int_{(2L)} \left\{\frac{\cos u\xi}{\cos u a - u \cdot k_x \cdot \sin u a} - 1\right\} \frac{\mathfrak{Cof}\, u\eta}{\mathfrak{Cof}\, u\beta + u \cdot k_y \cdot \mathfrak{Sin}\, u\beta} \cdot \frac{du}{u^3} \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Ihr entspricht, wenn gemäß (20a) $\pm \sigma_n$ die Wurzeln des ersten Nenners in (19) sind, die Reihendarstellung[4]) (20).

$$\operatorname{ctg} \bar{\sigma}_n = \frac{h_x}{a} \cdot \bar{\sigma}_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a), \qquad \bar{\sigma}_n = a \cdot \sigma_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20b).$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(x, y) = \frac{a^2 \cdot q}{2\lambda_x} \cdot \Bigg[1 - \frac{x^2}{a^2} + 2 \cdot \frac{h_x}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\bar{\sigma}_n^2 \cdot \{1 + (a/h_x) + (h_x/a) \cdot \bar{\sigma}_n^2\}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{a}\bar{\sigma}_n}{\cos \bar{\sigma}_n} \cdot \\ \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{b} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_n\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_n\right) + \bar{\sigma}_n \cdot (h_m/a) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \bar{\sigma}_n\right)}\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad . \quad (20).$$

Sie kann aus (19) in ganz derselben Weise gewonnen werden wie z. B. (13a) aus (13). Selbstverständlich gibt die Reihe (20) z. B. auch die Temperaturverteilung im Innern einer unsymmetrisch aufgebauten stromdurchflossenen Spule rechteckigen Querschnitts an.

Außer den schon früher berücksichtigten Spezialisierungen $b \to \infty$ und $\lambda_y \to 0$ kann im Anschluß an (20) noch der Fall $\mu_x \to \infty$ mit in Betracht gezogen werden. Physikalisch be-

[4]) Die gleiche Aufgabe behandelt auch Dr. E. Roth in seiner in Fußnote [1]) zitierten Arbeit auf S. 921 ... 932. Er löst sie jedoch auf einem mehr elementaren Wege mit Hilfe doppelter Fourierreihen. Die im vorstehenden benutzte Methode besitzt den Vorzug, daß sie von vornherein nur zu einer einfach unendlichen Reihe führt. Zwar ließe sich auch die Lösung von E. Roth durch geschickte Zusammenfassung der Glieder der Doppelreihe auf eine einfach unendliche Reihe reduzieren, aber die große Schwierigkeit besteht eben darin, diese Summationsmöglichkeit auch wirklich zu erkennen.

Bei der Durchrechnung des von E. Roth auf S. 926 ff. erörterten Beispiels mittels der Gl. (20) der vorliegenden Arbeit genügt zwecks Ermittlung der Höchsttemperatur bereits die Berücksichtigung des ersten Reihengliedes, um zu dem gleichen numerischen Wert zu gelangen.

deutet der Grenzübergang $\mu_x \to \infty$, daß an den zur x-Achse senkrechten Flächen wegen der daselbst äußerst kräftigen Kühlung die Temperatur gleich der des kühlenden Mittels bleibt. Mit $\mu_x \to \infty$ geht $h_x \to 0$, und zwar wegen (20a) so, daß $\cos \bar{\sigma}_n / h_x \to (\sin \bar{\sigma}_n / a) \cdot \bar{\sigma}_n = (2n-1)\pi/2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot 1/a$ geht. Aus dieser Bedingung läßt sich die für $\mu_x \to \infty$ aus (20) hervorgehende Grenzform leicht ermitteln.

Wichtiger ist der andere Spezialfall, bei dem etwa die rechte Vertikalkante des Querschnitts mehr und mehr nach außen rückt, so daß schließlich aus dem Rechteck ein einseitig ins Unendliche sich erstreckender Streifen der Breite 2b wird. Um die zugehörige Temperaturverteilung zu finden, muß in (19) vor dem Grenzübergang $a \to \infty$ zunächst $\xi - a$ statt ξ gesetzt werden. Die linke, von der Verschiebung nicht betroffene Rechteckskante fällt dann in die η-Achse des neuen Koordinatensystems. Wird das Integral in (19) entsprechend der darin vorkommenden Differenz in zwei Teile zerlegt, so kann das allein von η abhängende Integral in der schon mehrfach beschriebenen Weise durch Zusammenziehen auf die reelle Achse sofort ausgewertet werden. In dem noch übrigbleibenden Integral werde der obere und untere Teil des Integrationsweges für sich mit L_0 und L_u bezeichnet. Da längs L_0 bzw. L_u stets $Im(u) \gtreqless 0$ ist, so läßt sich für den ersten Bruch des zugehörigen Integranden im Falle $a \to \infty$ entsprechend schreiben:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \cos u\,\xi \cdot e^{\mp u \cdot i \cdot a} \mp \frac{1}{2i} \cdot \sin u\,\xi \cdot e^{\mp u \cdot i \cdot a}}{\frac{1}{2} \cdot e^{\mp u \cdot i \cdot a} \mp \frac{1}{2i} k_x \cdot e^{\mp u \cdot i \cdot a}} = \frac{e^{\pm u \cdot i \cdot \xi}}{1 \mp u \cdot i \cdot k_x}.$$

Setzt man daraufhin $-u$ statt u in dem Integral längs L_u, so entsteht aus L_u gemäß Abb. 2 sowohl in bezug auf den Weg als auch hinsichtlich des Integranden gerade das Integral L_0. Im ganzen gewinnt man demnach für die Temperaturverteilung in dem einseitig ins Unendliche gehenden Streifen der Breite 2b, der von der örtlich konstanten Wärmequelle q beheizt wird, die Integraldarstellung:

$$\Theta_s(x, y) = \frac{q \cdot b^2}{2\lambda_y} \cdot \left\{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2 \cdot \frac{h_y}{b} + \frac{2\sqrt{\lambda_y/\lambda_x}}{\pi i \cdot b^2} \cdot \int\limits_{(L_0)} \frac{e^{u \cdot i \cdot \xi}}{1 - u \cdot i \cdot k_x} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, u\,\eta}{\mathfrak{Cof}\, u\beta + u \cdot k_y \cdot \mathfrak{Sin}\, u\beta} \cdot \frac{du}{u^3}\right\} \quad (21).$$

Das in (21) auftretende Integral hat völlig die Form der bekannten Hakenintegrale. Es ließe sich wie in den früheren Fällen etwa dadurch auswerten, daß der Integrationsweg von links und rechts her an die positiv imaginäre Achse herangezogen wird und auf die so entstehende Schleife der Residuensatz angewendet wird. Auf die Wiedergabe der sich dadurch ergebenden Reihenentwicklungen soll jedoch verzichtet werden. Auch ohne Rechnung läßt sich aber aus (21) erkennen, daß die ersten drei Glieder in der geschweiften Klammer der Temperaturverteilung in dem weit entfernten Teil des Streifens angeben, da für $\xi \to \infty$ das Integral verschwindet.

Mittels der Gl. (5) und (12a, b) kann selbstverständlich auch der Fall eines mit x veränderlichen q behandelt werden, sobald das analytische Gesetz bekannt ist, das die Ergiebigkeit der Wärmequellen in ihrer Abhängigkeit von der x-Koordinate festlegt. Der Verlauf von $q(x)$ dürfte sogar sprunghafte Änderungen aufweisen.

Alle bisher aufgestellten Reihenentwicklungen sind den Gl. (13a), (17a) und (20) zufolge dadurch ausgezeichnet, daß ihre erste Zeile jeweils nur die x-Koordinate enthält. Dieser Bevorzugung der x-Richtung entspricht physikalisch der Umstand, daß wegen $\lambda_y < \lambda_x$ die Wärme hauptsächlich in Richtung der x-Achse abströmt. Aus der Integraldarstellung der angeführten Gleichungen kann aber jederzeit auch eine Reihenentwicklung hergeleitet werden, die in dem angegebenen Sinne umgekehrt auch die y-Richtung bevorzugt erscheinen läßt. Zu diesem Zwecke wäre z. B. bei der Gl. (13) in der Weise zu verfahren, daß der obere und untere Wegbestandteil von $(2L)$ mit seinen beiden Enden nach oben und unten an die imaginäre Zahlenachse herangeklappt wird. Die Integrale über die so entstehenden beiden Schleifen, die man sich im Unendlichen geschlossen denken kann, lassen sich wiederum durch Anwendung des Residuensatzes auswerten, indem nunmehr die Residuen der durch die Gl. (9a) festgelegten Pole berechnet werden.

Die Verwendung dieser Reihenentwicklungen für die numerische Berechnung der Temperaturverteilung wäre aber bei dem nun einmal angenommenen Größenverhältnis zwischen λ_x und λ_y äußerst unzweckmäßig, da ihre Konvergenz weitaus schlechter ist als diejenige der im Text angegebenen Reihen. Falls nämlich wie im vorliegenden Falle $\lambda_x > \lambda_y$

ist und entweder b größer ist als a oder doch nur wenig kleiner, genügt bei diesen Reihen in der Tat allein die Berücksichtigung des ersten, höchstens aber des zweiten Gliedes, um eine für praktische Bedürfnisse ausreichende Genauigkeit zu erzielen. Die Güte der Reihenkonvergenz ist natürlich nicht für alle Punkte des Querschnitts die gleiche. Am besten ist sie wegen $y=0$ für Punkte auf der x-Achse, am wenigsten gut für die x-parallelen Ränder des Querschnitts. Aber auch hier führt schon die Hinzunahme des zweiten Reihengliedes zu einer ausreichenden Genauigkeit.

Für ein Zahlenbeispiel zu dem zuerst behandelten Fall (1c) mögen die Zahlenangaben benutzt werden:

$$2a = 8\text{ cm}, \quad 2b = 6\text{ cm}, \quad \lambda_x = 0{,}32\text{ W/cm}\,^0\text{C}, \quad \lambda_y = 0{,}01\text{ W/cm}\,^0\text{C},$$

$$\mu_{x1} = 16\text{ mW/cm}^2\,^0\text{C}, \quad \mu_{x2} = 8\text{ mW/cm}^2\,^0\text{C}, \quad \mu_y = 20\text{ mW/cm}^2\,^0\text{C},$$

$$\lambda_r = 0{,}8\text{ mW/cm}\,^0\text{C}, \quad e = 0{,}185\text{ cm}.$$

Nach Gl. (1) berechnet sich daraus eine infolge der Isolation zwischen Kupfer und Eisen reduzierte Wärmeabgabeziffer $\mu'_{x1} = 4{,}32\text{ mW/cm}^2\,^0\text{C}$. Da damit infolge der Isolation $\mu'_{x1} < \mu_{x2}$ geworden ist, so wird die Höchsttemperatur im Eisenkörper nach dem linken Rande zu verschoben sein.

Für die angegebenen Zahlenwerte lauten die ersten beiden Wurzeln der Gl. (9b):

$$\bar{\sigma}_1 = 0{,}2732, \qquad \bar{\sigma}_2 = 1{,}6183.$$

In Abb. 3 sind mit diesen Zahlenwerten für den Längsschnitt $y=0$ in Abhängigkeit von x die Beträge der beiden eckigen Klammern in den Gl. (13a) und (17a) aufgetragen. Die Kurven I geben die Temperaturverteilung nach (13a) an, wenn nur eine einzelne Flächenquelle am linken Rande des Querschnitts vorhanden ist, während die Kurven II dem anderen Falle der Gl. (17a) entsprechen, wo die Wärmequellen gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind. Die beiden gestrichelten Kurven in dem Bilde zeigen den Verlauf jeweils der ersten Zeile der erwähnten Klammerglieder allein. Sie bilden mithin ein Maß für die im Querschnitt sich einstellende Temperatur, falls keine Wärme nach den Seiten in Richtung der y-Achse abströmen könnte. Die voll ausgezogenen Kurven berücksichtigen dagegen die Temperaturverminderung, die durch diesen seitlichen Wärmestrom bewirkt wird. Bei der Genauigkeit der graphischen Darstellung genügt in beiden Fällen bereits die Berücksichtigung allein des ersten Reihengliedes.

Abb. 3.

Nach der Kurve II liegt tatsächlich aus dem schon eben erwähnten Grunde die Maximaltemperatur etwas links von der Mittellinie. Der Unterschied der beiden Randtemperaturen beträgt in diesem Falle etwa 4,8 %, und die Maximaltemperatur liegt gar nur um 1,9 % über der höheren der beiden Randtemperaturen. Die Kurve I dagegen ergibt zwischen der Höchsttemperatur am linken Rande und der niedrigsten Temperatur am rechten Rande einen Unterschied von 26,4 % bezogen auf die Höchsttemperatur.

Für die beiden Wärmeflüsse, die am linken Rande aus dem Eisen ausströmen, erhält man für das gewählte Beispiel

$$\text{im Falle der flächenhaften Wärmequelle} \quad -0{,}212 \cdot Q \cdot d,$$

$$\text{im Falle der gleichmäßig verteilten Quellen} \quad +0{,}347 \cdot 2a \cdot q.$$

Die Wärme fließt also vom Eisen zum Kupferstab, sobald $2a \cdot q > 0{,}61 \cdot Q \cdot d$ ist. Die Temperatur des Kupferstabes erfährt unter dieser Bedingung durch den Wärmestrom aus dem Eisen eine zusätzliche Steigerung.

Die maximale Feldstärke und die Kapazität der Drehstromkabel.

Von *J. Friedrich Böttcher* in Dresden.

A. Einleitung.

Bisher liegen für die Bestimmung der maximalen Feldstärke in Mehrleiterkabeln nur wenige rechnerische Unterlagen vor, die den charakteristischen Bedingungen des Problems angepaßt sind. Die bekannte Formel für zwei parallele Zylinder bzw. für Zylinder und Ebene, die wohl vielfach unter Vereinfachung der Aufgabe angewendet wird, kann nur sehr grob angenäherte Werte liefern, besonders wenn sie zur Berechnung der Feldstärke zwischen den Leitern dient. Wegen der mathematischen Schwierigkeiten, die sich einer allgemeinen Darstellung der Feldstärke als Funktion der geometrischen Abmessungen des Kabelquerschnittes entgegenstellen, wurden mehrfach experimentelle Ermittlungen an elektrolytischen Modellen ausgeführt, u. a. von R. W. Atkinson[1]), der das Wesentliche seiner Meßergebnisse in einer empirischen Formel zusammenfaßte. Verhältnismäßig leichter läßt sich die Kapazität der Mehrleiterkabel angenähert berechnen. Werden die Ladungen als in den Leitermitten konzentriert betrachtet, so ergeben sich auch bei Berücksichtigung des Bleimantels einfache Gleichungen[2]).

Man wird also wenigstens in der Frage nach der Feldstärke die Vorteile einer exakten Berechnung zugeben können. Die vorliegende Arbeit behandelt nun als wichtigsten Fall das Drehstromkabel (Abb. 1), und zwar nach einer von E. Trefftz angegebenen Methode, die — in etwas anderer Form — auch von R. Liebold in seiner Dissertation[3]) verwendet wird. Hierbei werden wir uns auf die Höchstwerte der elektrischen Beanspruchung beschränken. Für die Feldstärke stellt sich sofort ein Minimalproblem ein: Die Abmessungen des Kabels so zu bestimmen, daß die größte im normalen Betrieb auftretende Feldstärke möglichst niedrig bleibt. Bei der Lösung dieser Aufgabe ergeben sich die Kapazitäten. Es wird sich hierbei zeigen, daß die nach dem bekannten Näherungsverfahren berechneten Teilkapazitäten erhebliche Abweichungen von den exakten Werten aufweisen können.

Voraussetzung für die folgenden Ableitungen ist, daß das Isoliermaterial des Kabels in bezug auf seine Dielektrizitätskonstante durchweg homogen ist. Eine weitere notwendige Einschränkung ist die Idealisierung der Leiter durch glatte Kreiszylinder, wodurch der Umstand vernachlässigt wird, daß die Leiter aus einzelnen Drähten zusammengesetzt sind.

B. Hauptteil.

I. Allgemeiner Teil.

Bekanntlich ist die Feldstärke definiert als der in Richtung des größten Gefälles gebildete negative Differentialquotient des Potentials φ. Nun sind die beim Verseilen der Kabel üblichen Schlaglängen gegen die Querschnittsdimensionen so groß, daß wir praktisch mit dem Verschwinden der axialen Feldkomponente rechnen können. Dann werden also die Verhältnisse durch Betrachtungen in einer zur Kabelachse senkrechten Ebene vollkommen festgelegt. Insbesondere wird φ im Querschnitt als diejenige ebene Potentialfunktion bestimmt, die im Innern des Gebietes, das vom Isolierstoff erfüllt ist, der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{. . . . . (1)}$$

genügt und an den Rändern die vorgeschriebenen Werte annimmt, d. h. also, daß φ am Bleimantelkreis verschwinden, an den Leiterkreisen in den jeweils durch den zeitlichen Spannungsverlauf des Drehstroms gegebenen Potentialwert übergehen soll.

Die Erledigung der gestellten Aufgabe wird dadurch erheblich gefördert, daß der Ansatz zur Lösung des Potentialproblems bereits fertig vorliegt in der erwähnten Arbeit von R. Liebold, die sich die zeichnerische Darstellung der Potentiallinien eines Drehstromkabels mit gegebenen Abmessungen zur Aufgabe stellt. Da die hierin enthaltene Potentialfunktion den Ausgangspunkt für die folgenden Ableitungen bildet, soll im nächsten Abschnitt kurz auf ihre Entwicklung eingegangen werden. Zugleich werden wir den Ansatz um die höheren Potenzen erweitern, um auch für größere Leiterdurchmesser eine hinreichende Genauigkeit zu erzielen.

[1]) R. W. Atkinson: Proc. A. I. E. E. Bd. 38, 1919, S. 815 (s. a. ETZ 1921, S. 108).
[2]) L. Lichtenstein: ETZ 1904, S. 106.
[3]) R. Liebold: Diss. Dresden 1931.

1. Die Reihenentwicklung der zu berechnenden Potentialfunktion. Zu Beginn wird die Symmetrie des betrachteten Kabels dazu benutzt, das Problem auf den Spezialfall zu reduzieren, bei welchem

$$\left.\begin{array}{ll}\text{der Leiter 1 das Potential} & +1\\ \text{alle übrigen Ränder das Potential} & 0\end{array}\right\}$$

besitzen; denn es ist klar, daß an irgendeiner Stelle des Feldes erstens das vom Leiter 1 herrührende Potential proportional dem Potential des Leiters 1 ist, und daß sich zweitens im allgemeinen Fall das Potential aus den von den drei Leitern stammenden Anteilen additiv zusammensetzt.

Eine Vereinfachung der Lösung wird durch die folgende Abbildung erzielt. Liegt der Nullpunkt der Ebene $z = x + i y$ im Kreismittelpunkt (Abb. 1), so wird durch die Funktion

$$\zeta = i R \cdot \frac{R + z}{R - z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

die z-Ebene derart auf die Ebene $\zeta = \xi + i \eta$ abgebildet, daß das Innere des Kabels in die obere, das Äußere in die untere Halbebene übergeht, während der Bleimantelkreis als Trennungslinie beider Bereiche der ξ-Achse entspricht (Abb. 2).

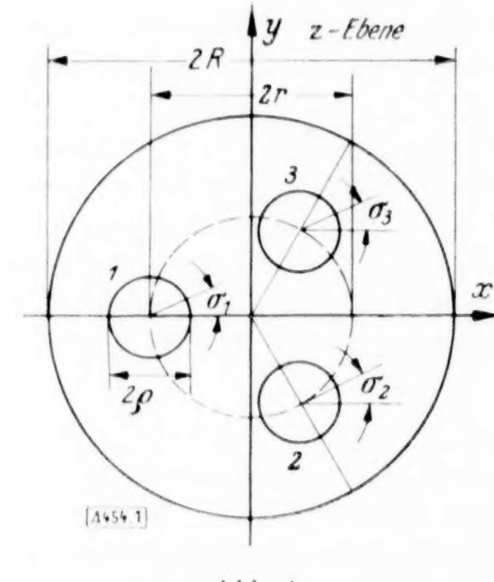


Abb. 1.

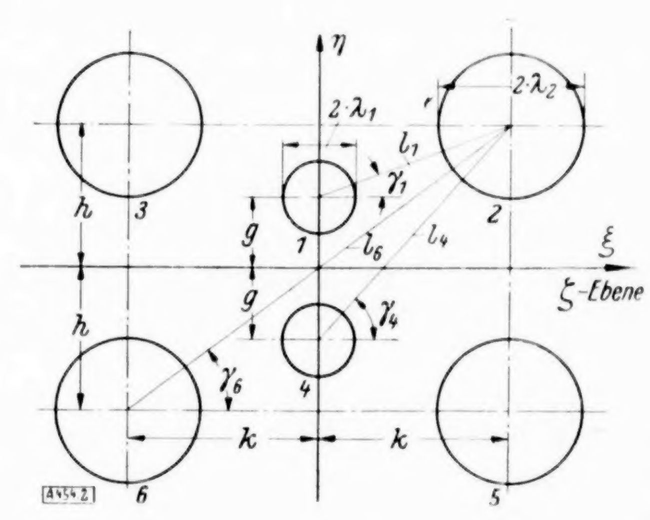


Abb. 2.

Da die gewählte Abbildungsfunktion der Gruppe der linearen Transformationen angehört, so werden Kreise wieder in Kreise, bzw. im Grenzfall in Geraden übergeführt. Dabei sind allgemein die Mittelpunktskoordinaten ξ_0, η_0 und Radien λ der ζ-Ebene durch die folgenden Gleichungen[4]) mit den entsprechenden Größen x_0, y_0 und ϱ der z-Ebene verknüpft:

$$\xi_0 = \frac{-2 \cdot y_0 \cdot R^2}{(R - x_0)^2 + y_0^2 - \varrho^2}, \quad \eta_0 = \frac{R \cdot (R^2 + \varrho^2 - x_0^2 - y_0^2)}{(R - x_0)^2 + y_0^2 - \varrho^2}, \quad \lambda = \frac{2 \cdot \varrho \cdot R^2}{(R - x_0)^2 + y_0^2 - \varrho^2} \quad . \quad . \quad (3).$$

Der Leiter 1 hat in der ζ-Ebene seinen Mittelpunkt auf der η-Achse, die Leiter 2 und 3 liegen symmetrisch zur η-Achse und erhalten gleiche Radien. Für die Mittelpunktskoordinaten werden gemäß Abb. 2 die Bezeichnungen g, h, k eingeführt.

Die Anwendung des Abbildungsverfahrens wird dadurch ermöglicht, daß das gesuchte Potential φ auch als Funktion der neu eingeführten Variablen der Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0$$

genügt. Die durch Gl. (2) einander zugeordneten Punkte der z- und der ζ-Ebene haben gleiches Potential. Daher ist die Aufgabe prinzipiell als gelöst zu betrachten, wenn es gelingt, das Potential φ in der ζ-Ebene darzustellen. Um der Bedingung, daß φ auf der ξ-Achse verschwinden soll, zu genügen, werden die Leiterkreise an der ξ-Achse gespiegelt, wodurch die Kreise 4, 5, 6 neu hinzukommen, denen die Potentialwerte -1, 0, 0 beizulegen sind. Das Potential φ ist also in der ζ-Ebene so zu bestimmen, daß es folgende Randwerte annimmt:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{auf dem Kreise } 1 & & = +1\\ \text{,, ,, ,, } 4 & & = -1\\ \text{,, ,, ,, } 2, 3, 5, 6 & & = 0\end{array}\right\}.$$

[4]) R. Liebold: a.a.O. Gl. 19 und 20.

Nach einem grundlegenden funktionentheoretischen Satz erfüllen sowohl Realteil als Imaginärteil einer analytischen Funktion $w = u + i v$ der komplexen Veränderlichen $\zeta = \xi + i \eta$ die für Potentialfunktionen charakteristische Gl. (1). Außerdem sind beide Teile miteinander verknüpft durch die Beziehungen:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Es gilt jedoch auch die Umkehrung dieses Satzes: Jedes Potential φ ist Realteil einer analytischen Funktion, deren Imaginärteil ψ durch die Gl. (4) bestimmt ist.

Im vorliegenden Problem wird diese komplexe Funktion in der Form:

$$\varphi + i \psi = \sum_{h=1}^{6} A^{(h)} \cdot \ln(\zeta - \zeta_h) + \sum_{h=1}^{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_n^{(h)}}{(\zeta - \zeta_h)^n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

angesetzt, wobei ζ_h die komplexen Koordinaten der sechs Kreismittelpunkte sind und $A^{(h)}$ reelle, $\Gamma_n^{(h)}$ komplexe Konstanten darstellen. Unter Berücksichtigung der beiden Symmetriebedingungen bezüglich der Koordinatenachsen:

$$\varphi(\xi, \eta) = -\varphi(\xi, -\eta)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \quad \varphi(-\xi, \eta)$$

vereinfacht sich der Ansatz durch Verminderung der Zahl der Konstanten. Wenn die Größen $\Gamma_n^{(h)}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden und allgemein die zu den Kreisen 1 und 4 gehörenden Konstanten durch große Buchstaben, die übrigen durch kleine ausgedrückt werden, so sind wegen der Symmetrie nur einfache, auf den Grad des Gliedes in der Potenzreihenentwicklung bezügliche Indizes notwendig. Der Ansatz (5) erhält dadurch folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi + i \psi = &+ a_0 \cdot \ln \frac{(\zeta - \zeta_5)(\zeta - \zeta_6)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)} + A_0 \cdot \ln \frac{(\zeta - \zeta_4)}{(\zeta - \zeta_1)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i b_n) \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta_2)^n} - \frac{(-1)^n}{(\zeta - \zeta_6)^n} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta_5)^n} - \frac{(-1)^n}{(\zeta - \zeta_3)^n} \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)^{2n}} - \frac{1}{(\zeta - \zeta_4)^{2n}} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} i B_{2n-1} \left[\frac{1}{(\zeta - \zeta_1)^{2n-1}} + \frac{1}{(\zeta - \zeta_4)^{2n-1}} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots (6).$$

Dieser Ansatz unterscheidet sich von der Form (32) der Lieboldschen Arbeit nur darin, daß in der letzteren die Potenzen der Radien λ aus den Konstanten herausgetrennt sind. Die Konvergenz der Entwicklung (6), die natürlich die Voraussetzung aller Reihendarstellungen bildet, ist durch bekannte funktionentheoretische Sätze gewährleistet.

2. Die Entwicklung des Potentials in der Umgebung der Kreismittelpunkte. Nachdem die prinzipielle Lösung für das Potential vorliegt, haben wir uns mit der Ermittlung der Konstanten $a_0, A_0, \ldots$ aus den Randbedingungen zu befassen. Wir wählen dabei einen Weg, der uns dem Endziel, nämlich der Bestimmung der Feldstärke an den Leitern, näher bringt: Wir bilden die Entwicklungen für φ in der Umgebung der Kreismittelpunkte 1 und 2 und finden dadurch eine allgemeine Darstellung der Konstanten in Abhängigkeit von den auf den Kreisen gegebenen Randwerten.

a) Entwicklung für Mittelpunkt 1. Ausgehend von Ansatz (6) entwickeln wir zunächst die komplexe Funktion $\varphi + i \psi$ in eine Reihe nach Potenzen von $(\zeta - \zeta_1)$. Dabei können wir die $(\zeta - \zeta_1)$ enthaltenden Glieder einfach beibehalten. Die übrigen Summanden mit den Größen $(\zeta - \zeta_h)$ lassen sich nach der Umformung:

$$(\zeta - \zeta_h) = (\zeta_1 - \zeta_h) \cdot \left[1 + \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_h} \right]$$

in Reihen nach Potenzen von $\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_h} \right)$ entwickeln, dessen Absolutbetrag in der Umgebung

des Kreises 1 kleiner als 1 bleibt, so daß die entstehenden Reihen konvergieren. Ist einmal die Reihe für $\ln(\zeta - \zeta_h)$ aufgestellt, so folgen alle übrigen durch Differentiieren nach ζ. Es sind:

$$\left.\begin{aligned} \ln(\zeta-\zeta_h) &= \ln(\zeta_1-\zeta_h) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta_h-\zeta_1}\right)^m \\ (\zeta-\zeta_h)^{-n} &= (-1)^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} \cdot \frac{(\zeta-\zeta_1)^m}{(\zeta_h-\zeta_1)^{m+n}}, \qquad n=1,2,3,\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Setzen wir diese Reihen in den Ansatz (6) ein und ordnen die einzelnen Glieder nach Potenzen von $(\zeta - \zeta_1)$, so gewinnen wir die Laurentsche Entwicklung der analytischen Funktion $\varphi + i\psi$ für die Umgebung des Mittelpunktes 1. Wir wollen jedoch diese Reihe nicht in komplexer Form hinschreiben, sondern den im folgenden allein interessierenden Realteil φ heraustrennen. Wird der Absolutbetrag $|\zeta - \zeta_1|$ mit r_1, und der Winkel, den $(\zeta - \zeta_1)$ mit der positiven ξ-Achse bildet, mit ϑ_1 bezeichnet, so werden:

$$\left.\begin{aligned} \ln(\zeta-\zeta_1) &= \ln r_1 + i\,\vartheta_1 \\ (\zeta-\zeta_1)^{\pm n} &= r_1^{\pm n} \cdot (\cos n\vartheta_1 \pm i \cdot \sin n\vartheta_1) \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Ebenso zerlegen wir die in den Entwicklungen enthaltenen komplexen Konstanten:

$$\left.\begin{aligned} \ln(\zeta_1-\zeta_h) &= \ln|\zeta_h-\zeta_1| + i(\tau_h+\pi) \\ (\zeta_h-\zeta_1)^{-n} &= |\zeta_h-\zeta_1|^{-n} \cdot (\cos n\tau_h - i \cdot \sin n\tau_h) \end{aligned}\right\} \quad (9),$$

wobei die von ζ_1 nach ζ_h gehende Verbindungsgerade mit der positiven ξ-Achse den Winkel τ_h bildet. Die hierdurch gewonnene Darstellung enthält statt der komplexen Variablen $(\zeta - \zeta_1)$ die beiden reellen Veränderlichen r_1 und ϑ_1, wobei natürlich entsprechende Glieder der absteigenden und der aufsteigenden Potenzreihe jeweils den gemeinsamen Faktor $\cos n\vartheta_1$ bzw. $\sin n\vartheta_1$ besitzen. Wir wollen daher die Potenzen r_1^{+n} und r_1^{-n} zusammenfassen und φ nach Art einer Fourierschen Entwicklung hinschreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = C_0 &+ C_2 \cdot \cos 2\vartheta_1 + C_4 \cdot \cos 4\vartheta_1 + \ldots \\ &+ D_1 \cdot \sin\vartheta_1 + D_3 \cdot \sin 3\vartheta_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (10).$$

Die Symmetrie des elektrischen Feldes zur η-Achse äußert sich darin, daß die Koeffizienten C mit ungeradem Index und die Koeffizienten D mit geradem Index identisch gleich Null sind.

Zur Vereinfachung werden die Strecken l_1, l_4, l_6 eingeführt (Abb. 2) und die Winkel τ_h, soweit sie von einem ganzen Vielfachen von $90°$ verschieden sind, durch die Winkel $\gamma_1, \gamma_4, \gamma_6$ ersetzt:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(h-g)^2+k^2} & \gamma_1 &= \operatorname{arctg}\frac{h-g}{k} \\ l_4 &= \sqrt{(h+g)^2+k^2} & \gamma_4 &= \operatorname{arctg}\frac{h+g}{k} \\ l_6 &= 2\cdot\sqrt{h^2+k^2} & \gamma_6 &= \operatorname{arctg}\frac{h}{k} \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Die Koeffizienten der Entwicklung (10) lassen sich hierdurch auf folgende Form bringen mit $p = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} C_0 = -A_0 \cdot \ln r_1 + \Bigg[& a_0 2 \cdot \ln\frac{l_4}{l_1} + A_0 \cdot \ln 2g \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2(-1)^n \left(+\frac{\cos n\gamma_1}{l_1^n} - \frac{\cos n\gamma_4}{l_4^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2(-1)^n \left(+\frac{\sin n\gamma_1}{l_1^n} - \frac{\sin n\gamma_4}{l_4^n}\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{(2g)^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2g)^{2n-1}} \Bigg] \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

$$\left.\begin{aligned}
C_{2p} = &+ \frac{A_{2p}}{r_1^{2p}} + r_1^{2p}\Bigg[a_0 \frac{1}{p}\left(+\frac{\cos 2p\gamma_1}{l_1^{2p}} - \frac{\cos 2p\gamma_4}{l_4^{2p}}\right) + A_0 \frac{1}{2p}\cdot\frac{(-1)^{p+1}}{(2g)^{2p}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2\cdot(2p+n-1)!}{(2p)!\,(n-1)!}(-1)^n\left(+\frac{\cos(2p+n)\gamma_1}{l_1^{2p+n}} - \frac{\cos(2p+n)\gamma_4}{l_4^{2p+n}}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2\cdot(2p+n-1)!}{(2p)!\,(n-1)!}(-1)^n\left(+\frac{\sin(2p+n)\gamma_1}{l_1^{2p+n}} - \frac{\sin(2p+n)\gamma_4}{l_4^{2p+n}}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{(2p+2n-1)!}{(2p)!\,(2n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{p+n+1}}{(2g)^{2p+2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1}\frac{(2p+2n-2)!}{(2p)!\,(2n-2)!}\cdot\frac{(-1)^{p+n+1}}{(2g)^{2p+2n-1}}\Bigg] \\
D_{2p-1} = &+ \frac{B_{2p-1}}{r_1^{2p-1}} + r_1^{2p-1}\Bigg[a_0 \frac{2}{2p-1}\left(+\frac{\sin(2p-1)\gamma_1}{l_1^{2p-1}} + \frac{\sin(2p-1)\gamma_4}{l_4^{2p-1}}\right) + A_0 \frac{1}{2p-1}\cdot\frac{(-1)^{p+1}}{(2g)^{2p-1}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2\cdot(2p+n-2)!}{(2p-1)!\,(n-1)!}(-1)^n\left(+\frac{\sin(2p+n-1)\gamma_1}{l_1^{2p+n-1}} + \frac{\sin(2p+n-1)\gamma_4}{l_4^{2p+n-1}}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{2\cdot(2p+n-2)!}{(2p-1)!\,(n-1)!}(-1)^n\left(-\frac{\cos(2p+n-1)\gamma_1}{l_1^{2p+n-1}} - \frac{\cos(2p+n-1)\gamma_4}{l_4^{2p+n-1}}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{(2p+2n-2)!}{(2p-1)!\,(2n-1)!}\cdot\frac{(-1)^{p+n+1}}{(2g)^{2p+2n-1}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \frac{(2p+2n-3)!}{(2p-1)!\,(2n-2)!}\cdot\frac{(-1)^{p+n+1}}{(2g)^{2p+2n-2}}\Bigg]
\end{aligned}\right\} \quad (12).$$

b) Entwicklung für Mittelpunkt 2. Indem wir jetzt die Mitte des Kreises 2 zum Ausgangspunkt für die Reihendarstellungen machen, finden wir ganz analog die Fouriersche Entwicklung für φ in der Umgebung des Mittelpunktes 2. In diesem Falle sind jedoch sämtliche Koeffizienten vorhanden:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi = c_0 + c_1\cdot\cos\vartheta_2 + c_2\cdot\cos 2\vartheta_2 + \dots \\
+ d_1\cdot\sin\vartheta_2 + d_2\cdot\sin 2\vartheta_2 + \dots
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (13).$$

Hierin ist wiederum die Zerlegung:

$$(\zeta - \zeta_2) = r_2\cdot(\cos\vartheta_2 + i\cdot\sin\vartheta_2)$$

enthalten. Die Koeffizienten lassen sich durch die Größen (11) in folgender Form darstellen mit $p = 1, 2, 3, \dots$:

$$\left.\begin{aligned}
c_0 = &- a_0\cdot\ln r_2 + \Bigg[a_0\cdot\ln\frac{h\cdot l_6}{k} + A_0\cdot\ln\frac{l_4}{l_1} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n\left(-\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{(2h)^n} + \frac{1}{(2k)^n} - \frac{\cos n\gamma_6}{l_6^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^n\left(-\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{(2h)^n} - \frac{\sin n\gamma_6}{l_6^n}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}\left(+\frac{\cos 2n\gamma_1}{l_1^{2n}} - \frac{\cos 2n\gamma_4}{l_4^{2n}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1}\left(+\frac{\sin(2n-1)\gamma_1}{l_1^{2n-1}} + \frac{\sin(2n-1)\gamma_4}{l_4^{2n-1}}\right)\Bigg]
\end{aligned}\right\} \quad (14).$$

$$\left.\begin{aligned}
c_p = {} & + \frac{a_p}{r_2^{\,p}} + r_2^{\,p}\left[a_0 \frac{1}{p}\left(- \frac{\cos p \frac{\pi}{2}}{(2h)^p} + \frac{(-1)^p}{(2k)^p} - (-1)^p \cdot \frac{\cos p \gamma_6}{l_6^{\,p}} \right) + A_0 \frac{1}{p} (-1)^p \left(+ \frac{\cos p \gamma_1}{l_1^{\,p}} - \frac{\cos p \gamma_4}{l_4^{\,p}} \right) \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} \left(-(-1)^n \cdot \frac{\cos (p+n) \frac{\pi}{2}}{(2h)^{p+n}} + \frac{(-1)^{p+n}}{(2k)^{p+n}} - (-1)^{p+n} \cdot \frac{\cos (p+n) \gamma_6}{l_6^{\,p+n}} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} \left(-(-1)^n \cdot \frac{\sin (p+n) \frac{\pi}{2}}{(2h)^{p+n}} - (-1)^{p+n} \cdot \frac{\sin (p+n) \gamma_6}{l_6^{\,p+n}} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{(p+2n-1)!}{p!\,(2n-1)!} (-1)^p \cdot \left(+ \frac{\cos (p+2n) \gamma_1}{l_1^{\,p+2n}} - \frac{\cos (p+2n) \gamma_4}{l_4^{\,p+2n}} \right) \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \frac{(p+2n-2)!}{p!\,(2n-2)!} (-1)^p \cdot \left(+ \frac{\sin (p+2n-1) \gamma_1}{l_1^{\,p+2n-1}} + \frac{\sin (p+2n-1) \gamma_4}{l_4^{\,p+2n-1}} \right) \right] \\
d_p = {} & + \frac{b_p}{r_2^{\,p}} + r_2^{\,p}\left[a_0 \frac{1}{p}\left(+ \frac{\sin p \frac{\pi}{2}}{(2h)^p} - (-1)^p \cdot \frac{\sin p \gamma_6}{l_6^{\,p}} \right) + A_0 \frac{1}{p} (-1)^p \left(+ \frac{\sin p \gamma_1}{l_1^{\,p}} - \frac{\sin p \gamma_4}{l_4^{\,p}} \right) \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} \left(+(-1)^n \cdot \frac{\sin (p+n) \frac{\pi}{2}}{(2h)^{p+n}} - (-1)^{p+n} \cdot \frac{\sin (p+n) \gamma_6}{l_6^{\,p+n}} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} \left(-(-1)^n \cdot \frac{\cos (p+n) \frac{\pi}{2}}{(2h)^{p+n}} + \frac{(-1)^{p+n}}{(2k)^{p+n}} + (-1)^{p+n} \cdot \frac{\cos (p+n) \gamma_6}{l_6^{\,p+n}} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \frac{(p+2n-1)!}{p!\,(2n-1)!} (-1)^p \cdot \left(+ \frac{\sin (p+2n) \gamma_1}{l_1^{\,p+2n}} - \frac{\sin (p+2n) \gamma_4}{l_4^{\,p+2n}} \right) \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \frac{(p+2n-2)!}{p!\,(2n-2)!} (-1)^p \cdot \left(- \frac{\cos (p+2n-1) \gamma_1}{l_1^{\,p+2n-1}} - \frac{\cos (p+2n-1) \gamma_4}{l_4^{\,p+2n-1}} \right) \right]
\end{aligned}\right\} \quad (14).$$

3. Die Bestimmung der Konstanten. Nach Gl. (10) werden die Potentialwerte auf Kreis 1

$$\varphi = \Sigma C_\nu \cdot \cos \nu \vartheta_1 + \Sigma D_\nu \cdot \sin \nu \vartheta_1 ,$$

wo die C_ν und D_ν sich nach Gl. (12) mit $r_1 = \lambda_1$ durch die zu bestimmenden Konstanten des Ansatzes (6) für φ ausdrücken. Nun soll der Potentialwert auf dem Kreis 1 gleich 1 sein. Das wird erreicht, wenn $C_0 = 1$ ist und alle übrigen $C_\nu = 0$ und $D_\nu = 0$ sind. Setzen wir auf den linken Seiten der Gl. (12) diese Werte $C_0 = 1$, $C_\nu = D_\nu = 0$ für $\nu > 0$ ein, so erhalten wir ein erstes Gleichungssystem für die gesuchten Konstanten a_ν, b_ν, A_ν, B_ν.

Ein weiteres Gleichungssystem erhalten wir, wenn wir benutzen, daß auf dem Kreise 2 das Potential (s. Gl. (13))

$$\varphi = \Sigma c_\nu \cdot \cos \nu \vartheta_2 + \Sigma d_\nu \cdot \sin \nu \vartheta_2$$

null werden soll. Das ist der Fall, wenn $c_\nu = d_\nu = 0$ gemacht werden. Setzen wir also in den Gl. (14), in welchen die c_ν und d_ν durch die gesuchten Konstanten ausgedrückt sind, die linken Seiten gleich Null, so erhalten wir die noch fehlenden Gleichungen für die a_ν, b_ν, A_ν, B_ν. Wir haben dann die Lösung unserer Aufgabe auf die Lösung dieser beiden Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zurückgeführt.

Für die praktische Rechnung brechen wir die Entwicklung der Potentialfunktion φ (Gl. (6)) bei einer geeigneten Potenz ab. Nehmen wir die Glieder bis $(\zeta-\zeta_h)^{-n}$, also bis zur n-ten Potenz, so erhalten wir genau so viele Gleichungen wie Unbekannte, wenn wir auf den Kreisen 1 und 2 den Fourierkoeffizienten bis C_n, D_n, c_n, d_n die vorgeschriebenen Werte (Null bis auf $C_0=1$) erteilen.

Das Verfahren kann auf den Fall beliebig vorgegebener Randwerte ausgedehnt werden, im allgemeinen Falle werden die Koeffizienten C_ν, D_ν, c_ν, d_ν nicht null, sondern sie erhalten die Werte, die aus der Fourierentwicklung der vorgeschriebenen Randwerte hervorgehen.

Die allgemeine Form für die Entwicklung des Potentials φ, Gl. (10) und (12) bzw. (13) und (14), vereinfacht sich in unserem Falle, wenn die Ausdrücke in den eckigen Klammern der Gl. (12) und (14) mittels der Beziehungen:

$$C_0=1,\quad C_\nu=D_\nu=0 \text{ für } \nu>0,\quad \text{bei } r_1=\lambda_1,\quad \text{bzw. } c_\nu=d_\nu=0,\quad \text{bei } r_2=\lambda_2 \quad . \; . \quad (15)$$

eliminiert werden. Wir erhalten:

für die Umgebung des Kreises 1:

$$\left.\begin{aligned}\varphi=\left(1-A_0\ln\frac{r_1}{\lambda_1}\right)+A_2\left(\frac{1}{r_1^{\,2}}-\frac{r_1^{\,2}}{\lambda_1^{\,4}}\right)\cos 2\vartheta_1+A_4\left(\frac{1}{r_1^{\,4}}-\frac{r_1^{\,4}}{\lambda_1^{\,8}}\right)\cos 4\vartheta_1+\dots\\+B_1\left(\frac{1}{r_1}-\frac{r_1}{\lambda_1^{\,2}}\right)\sin\vartheta_1+B_3\left(\frac{1}{r_1^{\,3}}-\frac{r_1^{\,3}}{\lambda_1^{\,6}}\right)\sin 3\vartheta_1+\dots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16),$$

für die Umgebung des Kreises 2:

$$\left.\begin{aligned}\varphi=-a_0\ln\frac{r_2}{\lambda_2}+a_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{r_2}{\lambda_2^{\,2}}\right)\cos\vartheta_2+a_2\left(\frac{1}{r_2^{\,2}}-\frac{r_2^{\,2}}{\lambda_2^{\,4}}\right)\cos 2\vartheta_2+a_3\left(\frac{1}{r_2^{\,3}}-\frac{r_2^{\,3}}{\lambda_2^{\,6}}\right)\cos 3\vartheta_2+\dots\\+b_1\left(\frac{1}{r_2}-\frac{r_2}{\lambda_2^{\,2}}\right)\sin\vartheta_2+b_2\left(\frac{1}{r_2^{\,2}}-\frac{r_2^{\,2}}{\lambda_2^{\,4}}\right)\sin 2\vartheta_2+b_3\left(\frac{1}{r_2^{\,3}}-\frac{r_2^{\,3}}{\lambda_2^{\,6}}\right)\sin 3\vartheta_2+\dots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (17).$$

4. Die Feldstärke als Funktion des Ortes. Es ist bekannt, daß die Feldstärke, die man ihrer Definition gemäß darstellen kann durch:

$$E=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18),$$

die Maxima ihres Absolutbetrages an den Rändern annimmt. Da es uns lediglich auf die Ermittlung der Maximalwerte der Feldstärke ankommt, so dürfen wir unsere Ableitungen auf die Berandungen beschränken. Hierdurch wird die Rechnung erheblich vereinfacht. Auch den Bleimantel können wir von unseren Betrachtungen ausschließen; denn indem wir das Innere des Kabels durch reziproke Radien $\frac{R^2}{r'}$ am Bleimantelkreis spiegeln, erreichen wir, daß der letztere selbst im Innern des auf diese Weise erweiterten Potentialfeldes liegt. Spiegelbildlich gelegene Punkte besitzen stets entgegengesetzt gleiches Potential, und unendlich kleine Strecken des Innern erscheinen im Äußeren des Kreises im Verhältnis $\frac{R^2}{r'^2}$ vergrößert, das Potentialgefälle selbst also im umgekehrten Verhältnis verringert. Da sich demnach beim Durchschreiten des Bleimantels nach außen der Betrag der Feldstärke vermindert, kann sein Maximalwert nur an den Leitern liegen.

Im folgenden soll unter der Feldstärke der negative, ins Innere des vom Isolierstoff erfüllten Gebietes gerichtete Differentialquotient des Potentials verstanden werden.

a) Die Feldstärke in der ζ-Ebene. Da die Feldstärke senkrecht auf den Äquipotentiallinien steht, läßt sie sich an den Kreisen 1 und 2 als negativer Differentialquotient nach dem Radius darstellen, wobei der Winkel konstant zu halten ist. Wählen wir nun für φ die Entwicklungen (16) und (17), so gewinnen wir sofort für $E_{(\zeta)}$ die Fourierschen Reihen auf den Kreisen 1 und 2, indem wir einfach die Koeffizienten C, D bzw. c, d nach r_1 bzw. r_2 differentiieren, $r_1=\lambda_1$ und $r_2=\lambda_2$ setzen. Es wird

für Kreis 1:

$$\left.\begin{aligned}E_{(\zeta)}=A_0\cdot\frac{1}{\lambda_1}+A_2\cdot\frac{4}{\lambda_1^{\,3}}\cdot\cos 2\vartheta_1+A_4\cdot\frac{8}{\lambda_1^{\,5}}\cdot\cos 4\vartheta_1+\dots\\+B_1\cdot\frac{2}{\lambda_1^{\,2}}\cdot\sin\vartheta_1\quad+B_3\cdot\frac{6}{\lambda_1^{\,4}}\cdot\sin 3\vartheta_1+\dots\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19),$$

für Kreis 2:

$$\left.\begin{aligned} E_{(\zeta)} = a_0 \cdot \frac{1}{\lambda_2} + a_1 \cdot \frac{2}{\lambda_2^{\,2}} \cdot \cos\vartheta_2 + a_2 \cdot \frac{4}{\lambda_2^{\,3}} \cdot \cos 2\,\vartheta_2 + a_3 \cdot \frac{6}{\lambda_2^{\,4}} \cdot \cos 3\,\vartheta_2 + \ldots \\ + b_1 \cdot \frac{2}{\lambda_2^{\,2}} \cdot \sin\vartheta_2 + b_2 \cdot \frac{4}{\lambda_2^{\,3}} \cdot \sin 2\,\vartheta_2 + b_3 \cdot \frac{6}{\lambda_2^{\,4}} \cdot \sin 3\,\vartheta_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (20).$$

Diese Entwicklungen für E gelten im Gegensatz zu denjenigen für φ selbst nur auf den Kreisen; denn im Innern des Gebietes tritt im allgemeinen zur Radialkomponente der Feldstärke noch ihre Tangentialkomponente hinzu.

b) Die Feldstärke in der z-Ebene. Zur Berechnung der Feldstärke im Kabelquerschnitt ist es nicht notwendig, das Potential selbst in die z-Ebene zu übertragen; denn der Gradient von $\varphi_{(z)}$ läßt sich schreiben:

$$|\operatorname{grad} \varphi_{(z)}| = |\operatorname{grad} \varphi_{(\zeta)}| \cdot \left|\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

Der hierbei auftretende Umrechnungsfaktor gibt an, in welchem Maßstabe die unendlich kleine Strecke $|dz|$ in der ζ-Ebene abgebildet wird. Die Ableitung $\frac{d\,\zeta}{d\,z}$ gibt zugleich Aufschluß über die Zuordnung der Differentiationsrichtungen beider Ebenen; denn als Quotient zweier komplexer Zahlen besitzt diese Größe ein Argument gleich der Differenz der Argumente von $d\zeta$ und dz. Also ist dieser Winkel gleich der Drehung, welche die Richtung von dz bei der Abbildung in die ζ-Ebene erfährt.

Wir differentiieren die Abbildungsfunktion (2) nach z und bringen diesen Ausdruck, um Absolutbetrag und Argument abzusondern, durch einfache Zwischenrechnung auf die Form:

$$\frac{d\,\zeta}{d\,z} = \frac{2 \cdot R^2}{(R-x)^2 + y^2} \cdot e^{i\left(2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{R-x} + \frac{\pi}{2}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Die geometrische Bedeutung dieser Funktion geht sofort aus folgendem hervor: Ziehen wir vom Punkt z die Verbindungsgerade nach dem Punkt $z = +R$, so ist der Betrag $\left|\frac{d\,\zeta}{d\,z}\right|$ umgekehrt proportional dem Quadrat dieser Strecke. Das Argument ist gleich dem zweifachen von dieser Geraden mit der x-Achse gebildeten Winkel, zuzüglich der Konstanten $\frac{\pi}{2}$.

Da die zwischen der Feldstärke und den Leiteroberflächen bestehende Orthogonalität bei der Abbildung gewahrt bleibt, so entsprechen den radialen Elementen dz ebenfalls radiale Elemente $d\zeta$. Hieraus ergibt sich eine bequeme Zuordnung der Kreispunkte beider Ebenen. Bezeichnen wir mit σ den Winkel, den der zum Kreispunkt z gehörende Radius ϱ mit der positiven x-Achse bildet (Abb. 1), so können wir aus Gl. (22) sofort den entsprechenden Winkel ϑ der ζ-Ebene angeben:

$$\vartheta = \sigma + 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{R-x} + \frac{\pi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

Hiermit ist die Bestimmung der Feldstärke an den Leitern auf ihre Berechnung in der ζ-Ebene zurückgeführt, für welche die Entwicklungen (19) und (20) gelten.

5. Die Feldstärke als Funktion der Zeit. Haben wir bisher für den speziellen Fall, daß das Potential auf dem Leiter 1 den Wert $+1$, auf den anderen Leitern den Wert Null annimmt, die Feldstärke dargestellt, so handelt es sich nunmehr darum, die zeitliche Veränderlichkeit der Spannungen in Rechnung zu ziehen. Insbesondere müssen wir die durch die zeitliche Abhängigkeit bedingten Maximalwerte aufsuchen. Um die Rechnung zu unmittelbar brauchbaren Ergebnissen weiterführen zu können, machen wir die Voraussetzung, daß das System der Drehstromspannung symmetrisch, und daß der Kurvenverlauf genau sinus-förmig sei.

Verallgemeinern wir zunächst das Problem, indem wir den drei Leitern von Null verschiedene Potentialwerte erteilen, so wird sich im allgemeinen die Feldstärke vektoriell aus den von den drei Leitern stammenden Anteilen zusammensetzen. Unter Berücksichtigung des zeitlichen Verlaufes der Potentiale ergibt sich hieraus für im Innern des Isolierstoffs gelegene Punkte ein mit der Periode des Wechselstroms rotierendes elliptisches Drehfeld. Die

vektorielle Addition geht aber in eine algebraische über, wenn wir uns den Berandungen nähern, auf die wir gemäß unseren Feststellungen über den Sitz der Maximalwerte auch die folgenden Betrachtungen beschränken wollen.

a) Maximalwerte bei normalem Betrieb. Wir bezeichnen mit E_1, E_2, E_3 die Feldstärke an einer beliebigen Stelle der Berandung, wenn die Leiter 1, 2, 3 nacheinander je das Potential $+1$, die übrigen jedesmal das Potential Null haben. Natürlich sind wegen der Symmetrie der Anordnung durch den örtlichen Verlauf der Funktion E_1, deren Ermittlung unsere bisherigen Betrachtungen galten, auch die Größen E_2 und E_3 bestimmt. Bedeutet ferner V den Scheitelwert der Phasenspannung (Leiter gegen Erde), ω die Kreisfrequenz, so ist zur Zeit t die Feldstärke:

$$E = V \cdot \left[E_1 \cdot \cos \omega t + E_2 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) + E_3 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \cdot \pi\right) \right].$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch auf die Form bringen:

$$E = V \cdot \left[E(0) \cdot \cos \omega t + E\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \omega t \right],$$

wenn wir mit $E(0)$ und $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ die für $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$ vorhandene Feldstärke bei der Scheitelspannung $V = 1$ bezeichnen. Es sind:

$$\left.\begin{aligned} E(0) &= E_1 - \frac{1}{2} \cdot (E_2 + E_3) \\ E\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (E_2 - E_3) \end{aligned}\right\} \qquad (24).$$

Setzen wir den Differentialquotienten von E nach t gleich Null, so erhalten wir für den Zeitpunkt des Maximalwertes:

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{E\left(\frac{\pi}{2}\right)}{E(0)},$$

und für das Maximum der Feldstärke selbst:

$$E_{\max} = V \cdot \sqrt{E(0)^2 + E\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = V \cdot \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1 \cdot E_2 - E_2 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_3} \qquad (25).$$

b) Maximalwerte bei Erdschluß. Neben dem normalen Betriebszustand interessiert noch besonders der Fall des einphasigen Erdschlusses, da hierbei wesentlich größere Feldstärken auftreten können. Nehmen wir an, daß etwa die Phase 3 ohne Widerstand mit dem Erdpotential verbunden sei, so rückt der Nullpunkt des Spannungsdiagramms (Abb. 3) nach dem Punkt 3. Die Potentiale der Phasen 1 und 2 steigen auf den $\sqrt{3}$-fachen Wert des normalen Betriebs; denn die Vektoren $\overrightarrow{31}$ und $\overrightarrow{32}$ stellen jetzt die Phasenspannungen der ungeerdeten Leiter dar. Sie schließen einen Winkel von 60° ein. Da der Leiter 3 keinen Beitrag liefert, erhalten wir für die Feldstärke bei Erdschluß:

$$E_e = V \cdot \sqrt{3} \cdot \left[E_e(0) \cdot \cos \omega t + E_e\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin \omega t \right],$$

wenn wiederum

$$\left.\begin{aligned} E_e(0) &= E_1 + \frac{1}{2} \cdot E_2 \\ E_e\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_2 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Abb. 3.

gesetzt wird. Schließlich ist der Maximalwert bei Erdschluß:

$$E_{e\,\max} = V \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_e(0)^2 + E_e\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = V \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_1 \cdot E_2} \qquad (27).$$

6. Die Kapazität. Stellen wir in der ζ-Ebene nach dem Gaußschen Satz die Ladungen der Leiter 1 und 2 als Verschiebungsfluß durch die Oberfläche dar, und benutzen hierbei die Entwicklungen (19) und (20) für die Feldstärke, so zeigt sich sofort, daß bei der Integration sämtliche Glieder mit Ausnahme des vom Winkel ϑ unabhängigen Gliedes verschwinden. Für die Potentialverteilung $(+1, 0, 0)$ sind daher die Ladungen, wenn ε die relative Dielektrizitätskonstante des Isolierstoffes ist, und die Potentialeinheit 1 Volt beträgt:

$$q_1 = \frac{\varepsilon}{18 \cdot 10^6} \cdot A_0 \quad C/km, \qquad q_2 = \frac{\varepsilon}{18 \cdot 10^6} \cdot a_0 \quad C/km \quad \ldots\ldots \quad (28).$$

In der z-Ebene sind die Ladungen ebenso groß, da von entsprechenden Leitern beider Ebenen gleichviele Verschiebungslinien ausgehen.

Zwischen den Ladungen q und den Potentialen p eines Mehrleitersystems besteht bekanntlich lineare Abhängigkeit, deren Koeffizienten a nur von der räumlichen Anordnung und vom Isolierstoff abhängig sind. Bei unserem symmetrischen Dreileitersystem reduziert sich die Zahl der Koeffizienten auf zwei:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= q_1 \cdot a_{11} + (q_2 + q_3) \cdot a_{12} \\ p_2 &= q_2 \cdot a_{11} + (q_1 + q_3) \cdot a_{12} \\ p_3 &= q_3 \cdot a_{11} + (q_1 + q_2) \cdot a_{12} \end{aligned}\right\}$$

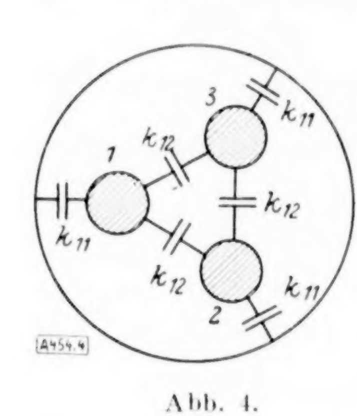


Abb. 4.

Nach q aufgelöst lauten diese Gleichungen, wenn statt der Potentiale deren Differenzen eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= p_1 \cdot k_{11} + (2 \cdot p_1 - p_2 - p_3) \cdot k_{12} \\ q_2 &= p_2 \cdot k_{11} + (2 \cdot p_2 - p_1 - p_3) \cdot k_{12} \\ q_3 &= p_3 \cdot k_{11} + (2 \cdot p_3 - p_1 - p_2) \cdot k_{12} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

Die Größen k_{11}, k_{12} werden allgemein als „Teilkapazitäten" bezeichnet, da man sie als Kondensatoren auffassen kann, die zwischen Leiter und Erde bzw. zwischen die Leiter eingeschaltet sind (Abb. 4). Sie sind mit den „Potentialkoeffizienten" a_{11}, a_{12} verknüpft durch

$$k_{11} = \frac{1}{a_{11} + 2 \cdot a_{12}}, \qquad k_{12} = k_{11} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{12}} \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Endlich interessiert noch die für symmetrische Spannung definierte „Betriebskapazität"

$$C_b = k_{11} + 3 \cdot k_{12} = \frac{1}{a_{11} - a_{12}} \quad \ldots\ldots \quad (31).$$

Da wir die Ladungen q_1, q_2, für $p_1 = +1$, $p_2 = p_3 = 0$ unter Gl. (28) berechnet haben, lassen sich die Kapazitäten sofort aus den Gl. (29) angeben:

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\varepsilon}{18} \cdot (A_0 + 2 \cdot a_0) \quad \mu F/km \qquad k_{12} = -\frac{\varepsilon}{18} \cdot a_0 \quad \mu F/km \\ C_b &= \frac{\varepsilon}{18} \cdot (A_0 - a_0) \quad \mu F/km \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (32).$$

II. Numerischer Teil[5]).

1. Die Konstanten der Potentialfunktion. Wie aus unseren allgemeinen Ableitungen hervorgeht, ist es nicht möglich, die Feldstärke und die Kapazität als einfache Funktionen der Kabeldimensionen darzustellen. Bei der Untersuchung dieser Abhängigkeiten sind wir daher gezwungen, die Berechnungen für diskrete Zahlenwerte durchzuführen. Zunächst ist es klar, daß der Verlauf des elektrischen Feldes nur von den Größenverhältnissen $\frac{\varrho}{R}$ und $\frac{r}{R}$ bestimmt wird. Wir wollen daher R konstant halten und

$$R = 1 \text{ cm}$$

setzen. Im folgenden sind also ϱ und r als unabhängige Veränderliche zu betrachten. Zur Vereinfachung werden wir noch das Potential bzw. den zeitlichen Maximalwert der Spannung

[5]) Die numerischen Rechnungen erstreckten sich ursprünglich der Aufgabe der Dissertation entsprechend nur auf die Ermittlung des absoluten Optimalfalles. Da ein allgemeineres Interesse an den Ergebnissen angenommen werden konnte, wurde über den Umfang der Dissertation hinaus im Rahmen des „Ingenieurdienstes" der gesamte, praktisch interessierende Dimensionsbereich untersucht und die gewonnenen Zahlenwerte mit den früheren zusammengestellt.

gleich 1 setzen und als dimensionslose Zahl ansehen, wodurch die Feldstärke die Dimension cm^{-1} erhält. Da die Feldstärke dem Scheitelwert V direkt, dem Bleimantelradius R bei sonst gleichen Größenverhältnissen umgekehrt proportional ist, so erfolgt die Umrechnung der von uns gewonnenen Zahlen einfach durch Multiplikation mit $\frac{V}{R}$.

Zur Ermittlung des Optimalfalles wurden die numerischen Einzelfälle der Tab. 1 zahlenmäßig durchgerechnet. Es ergeben sich für die Entwicklungskonstanten des Potentials φ die in Tab. 2 wiedergegebenen Werte. Man erhält eine Kontrolle, wenn man die Potentialwerte der Näherungslösung auf den Kreisen 1 und 2 ausrechnet und mit den vorgeschriebenen Werten 1 und 0 vergleicht. Als Maximalfehler ergaben sich z. B. für das Beispiel 11 ($\varrho = 0{,}2$ cm, $r = 0{,}5$ cm) auf Kreis 1: $-0{,}000.39$, auf Kreis 2: $-0{,}001.89$.

Tabelle 1: Radien und Koordinaten der ζ-Ebene.

	$R = 1$ cm		Kreis 1		Kreis 2		
Nr.	ϱ cm	r cm	λ_1 cm	g cm	λ_2 cm	h cm	k cm
1	0,05	0,40	0,051.086	0,430.40	0,132.015	1,112.22	0,914.62
2	0,05	0,50	0,044.494	0,334.82	0,133.78	1,006.7	1,158.57
3	0,05	0,56	0,041.134	0,283.37	0,133.138	0,917.19	1,291.39
4	0,10	0,40	0,102.564	0,435.90	0,266.667	1,133.33	0,923.76
5	0,10	0,50	0,089.286	0,339.28	0,270.27	1,027.02	1,170.3
6	0,10	0,56	0,082.522	0,287.34	0,268.96	0,936.53	1,304.41
7	0,15	0,42	0,150.455	0,424.34	0,408.77	1,152.87	0,991.22
8	0,15	0,50	0,134.678	0,346.80	0,412.37	1,061.88	1,190.42
9	0,15	0,56	0,124.426	0,294.01	0,410.34	0,969.62	1,326.7
10	0,20	0,44	0,196.695	0,416.21	0,560.54	1,186.14	1,067.98
11	0,20	0,50	0,180.996	0,357.47	0,563.38	1,112.68	1,219.75
12	0,20	0,56	0,167.11	0,303.48	0,560.54	1,017.95	1,359.25
13	0,25	0,46	0,241.65	0,411.24	0,725.58	1,234.79	1,156.2
14	0,25	0,50	0,228.57	0,371.42	0,727.27	1,181.78	1,259.65
15	0,25	0,54	0,216.534	0,333.85	0,725.58	1,118.71	1,357.28

2. Maximalwerte der Feldstärke bei normalem Betrieb. Bezeichnen wir wie früher mit E_1, E_2, E_3 die Feldstärken, welche auf der Berandung hervorgerufen werden, wenn die Leiter 1, 2, 3 nacheinander je das Potential $+1$, die übrigen das Potential Null haben, so erhalten wir nach Gl. (25) als zeitlichen Maximalwert der Feldstärke für die Scheitelspannung $V = 1$

$$F = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_1 \cdot E_2 - E_2 \cdot E_3 - E_1 \cdot E_3}\,.$$

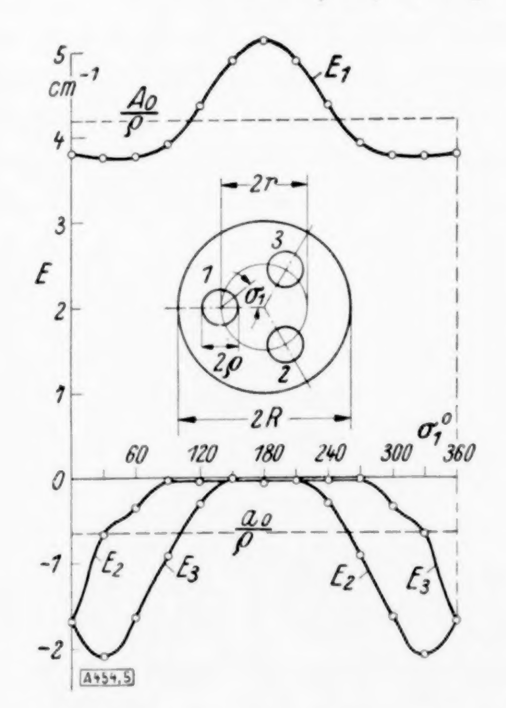


Abb. 5. Feldstärken E_1, E_2, E_3 am Leiter 1. Dim.: $R = 1$ cm, $\varrho = 0{,}2$ cm, $r = 0{,}5$ cm.

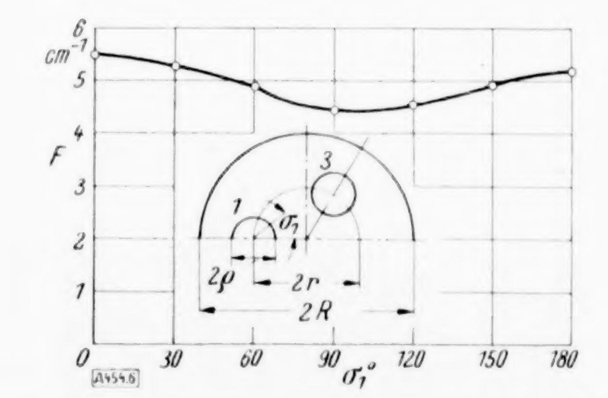


Abb. 6. Maxim. Feldst. an den Leitern bei norm. Betrieb. Max. Phasensp. $V = 1$. Dim.: $R = 1$ cm, $\varrho = 0{,}2$ cm, $r = 0{,}5$ cm.

Tabelle 2: Die Konstanten der Potentialfunktion ($R = 1$ cm).

Nr.	ϱ cm	r cm	$A_0 \cdot 10^6$	— / $B_1 \cdot 10^6$	$A_2 \cdot 10^6$ / —	— / $B_3 \cdot 10^6$	$A_4 \cdot 10^6$ / —	— / $B_5 \cdot 10^6$	$a_0 \cdot 10^6$	$a_1 \cdot 10^6$ / $b_1 \cdot 10^6$	$a_2 \cdot 10^6$ / $b_2 \cdot 10^6$	$a_3 \cdot 10^6$ / $b_3 \cdot 10^6$	$a_4 \cdot 10^6$ / $b_4 \cdot 10^6$	$a_5 \cdot 10^6$ / $b_5 \cdot 10^6$
1	0,05	0,40	+ 371475	—	− 1,5824	—	—	—	− 50966	+ 2401,0	− 16,406	—	—	—
				− 849,94	—	—	—	—		+ 928,84	− 27,009	—	—	—
2	0,05	0,50	+ 376940	—	− 1,6138	—	—	—	− 34948	+ 1741,8	− 16,948	—	—	—
				− 1002,5	—	—	—	—		+ 98,328	− 10,824	—	—	—
3	0,05	0,56	+ 386450	—	− 1,7169	—	—	—	− 27441	+ 1356,6	− 14,557	—	—	—
				− 1091,8	—	—	—	—		− 185,06	− 4,2066	—	—	—
4	0,10	0,40	+ 512140	—	− 33,891	—	—	—	− 87773	+ 12589	− 313,56	− 7,1316	—	—
				− 4132,1	—	+ 0,366,00	—	—		+ 6201,6	− 607,50	+ 34,871	—	—
5	0,10	0,50	+ 516330	—	− 35,301	—	—	—	− 60664	+ 9248,5	− 344,36	+ 7,5952	—	—
				− 5273,0	—	+ 0,30493	—	—		+ 1398,8	− 251,26	+ 19,521	—	—
6	0,10	0,56	+ 532500	—	− 38,167	—	—	—	− 48336	+ 7299,7	− 301,26	+ 10,262	—	—
				− 5908,0	—	+ 0,31894	—	—		− 285,3	− 106,00	+ 11,226	—	—
7	0,15	0,42	+ 661880	—	− 215,52	—	—	—	− 123177	+ 33071	− 1843,7	− 79,758	—	—
				− 11338	—	+ 5,3738	—	—		+ 17425	− 3541,2	+ 461,78	—	—
8	0,15	0,50	+ 663960	—	− 229,82	—	—	—	− 91022	+ 25804	− 2027,7	+ 88,446	—	—
				− 14606	—	+ 4,6310	—	—		+ 6463,1	− 1759,9	+ 286,99	—	—
9	0,15	0,56	+ 688290	—	− 253,72	—	—	—	− 72892	+ 20607	− 1818,5	+ 134,73	—	—
				− 16918	—	+ 4,8810	—	—		+ 1260,0	− 814,72	+ 168,54	—	—
10	0,20	0,44	+ 842180	—	− 843,86	—	+ 0,95902	—	− 165204	+ 67665	− 6461,6	− 479,30	+ 456,00	—
				− 24308	—	+ 38,972	—	—		+ 38212	− 12766	+ 2952,4	− 429,97	—
11	0,20	0,50	+ 840380	—	− 917,40	—	+ 1,1300	—	− 129432	+ 55715	− 7107,8	+ 412,62	+ 164,96	—
				− 31164	—	+ 34,624	—	—		+ 19849	− 7621,8	+ 2053,4	− 389,66	—
12	0,20	0,56	+ 875860	—	− 1044,9	—	+ 1,3301	—	− 103038	+ 44808	− 6595,9	+ 806,53	− 12,568	—
				− 37754	—	+ 36,894	—	—		+ 7440,3	− 3846,9	+ 1240,3	− 289,34	—
13	0,25	0,46	+ 1075130	—	− 2583,6	—	+ 7,4500	—	− 218490	+ 122460	− 16971	− 2241,9	+ 3120,2	− 1407,4
				− 46528	—	+ 192,95	—	− 0,5542		+ 74278	− 36004	+ 12804	− 2990,6	+ 165,10
14	0,25	0,50	+ 1069050	—	− 2826,6	—	+ 8,7854	—	− 181674	+ 106115	− 18524	+ 681,90	+ 1622,4	− 940,8
				− 57936	—	+ 178,44	—	− 0,5707		+ 49677	− 25638	+ 9996,5	− 2801,0	+ 427,7
15	0,25	0,54	+ 1095680	—	− 3153,7	—	+ 10,120	—	− 153660	+ 91867	− 18478	+ 2436,9	+ 560,04	− 557,4
				− 68836	—	+ 184,06	—	− 0,6440		+ 31088	− 17387	+ 7418,6	− 2393,8	+ 528,6

Wenn die Potentialfunktion φ berechnet ist, welche auf Leiter 1 den Wert $+1$, auf Leiter 2 und 3 und dem Bleimantel den Wert Null annimmt, so erhalten wir E_1 nach den Formeln (19, 20, 21, 22). Damit sind auch E_2 und E_3 bekannt; denn wegen der Symmetrie ist die Feldstärke E_2 auf dem Leiter 1, wenn Leiter 2 das Potential $+1$ hat, und die übrigen das Potential Null, gleich der Feldstärke auf Leiter 2, wenn Leiter 1 das Potential $+1$ hat, und die übrigen das Potential Null.

Abb. 5 zeigt für das numerische Beispiel 11 ($R = 1$ cm, $\varrho = 0{,}2$ cm, $r = 0{,}5$ cm) die Werte von E_1, E_2, E_3 für den Leiter 1. Die daraus für jeden Punkt des Umfanges berechnete maximale Feldstärke ist in Abb. 6 dargestellt.

Wesentlich ist hier — und das gilt auch für alle anderen Fälle des untersuchten Bereiches —, daß die örtlichen Höchstwerte F der zeitlichen Feldstärkenmaxima bei $\sigma_1 = 0^\circ$ und $\sigma_1 = 180^\circ$ auftreten, d. h. an den der Kabelmitte und dem Bleimantel zunächstliegenden Punkten. Tab. 3 gibt die Werte von F an den Stellen $\sigma_1 = 0^\circ, 30^\circ, 180^\circ$ für die gerechneten Fälle.

Tabelle 3: Maximalwerte der Feldstärke bei normalem Betrieb ($V = 1$, $R = 1$ cm).

Nr.	ϱ cm	r cm	$F^{(0)}$ cm^{-1}	$F^{(30)}$ cm^{-1}	$F^{(180)}$ cm^{-1}
1	0,05	0,40	9,00	8,89	8,01
2	0,05	0,50	8,34	8,30	8,23
3	0,05	0,56	8,14	8,13	8,52
4	0,10	0,40	6,88	6,72	5,46
5	0,10	0,50	5,97	5,90	5,84
6	0,10	0,56	5,66	5,63	6,24
7	0,15	0,42	6,40	6,15	4,70
8	0,15	0,50	5,42	5,27	5,17
9	0,15	0,56	4,96	4,89	5,73
10	0,20	0,44	6,48	6,25	4,69
11	0,20	0,50	5,49	5,28	5,18
12	0,20	0,56	4,86	4,69	5,98
13	0,25	0,46	6,87	6,88	5,06
14	0,25	0,50	5,94	5,89	5,56
15	0,25	0,54	5,27	5,22	6,29

Zur Ermittlung der optimalen Kabelabmessungen gehen wir nun so vor: Wir halten zunächst den Leiterradius ϱ fest (immer bei $R = 1$ cm) und verändern r. Für kleines r liegt dann der ungünstigste Punkt (größtes F) bei $\sigma_1 = 0^\circ$ zunächst der Kabelmitte. Vergrößern wir r, so nimmt an diesem Punkte die größte Feldstärke $F^{(0)}$ ab, an dem dem Bleimantel zugekehrten Punkte $\sigma_1 = 180^\circ$ wächst sie. Der Optimalfall ist erreicht, wenn die Maximalwerte an beiden Punkten gleich sind. Er wurde durch zeichnerische Interpolation ermittelt.

Tabelle 4: Maximale Feldstärke bei optimalen Verhältnissen und bei Bemessung nach V. D. E.-Vorschrift ($V = 1$, $R = 1$ cm).

	Optim. Bemessung		Bemessung nach V. D. E.-Vorschrift			
ϱ cm	r cm	F^* cm^{-1}	r cm	$F^{(0)}$ cm^{-1}	$F^{(0)}_{\text{Atk}}$ cm^{-1}	$F^{(180)}_{\text{e}}$ cm^{-1}
0,05	0,513	8,28	0,384.3	9,18	9,80	12,69
0,10	0,512	5,90	0,402.6	6,85	7,18	8,98
0,15	0,514	5,29	0,420.9	6,39	6,46	8,00
0,20	0,513	5,32	0,439.2	6,50	6,36	7,82
0,25	0,511	5,73	0,457.5	6,96	6,62	8,38

Abb. 7 zeigt die Interpolation für die Fälle $\varrho = 0{,}25$ und $0{,}05$ cm. Tab. 4 gibt für $\varrho = 0{,}05$; 0,10, 0,15, 0,20, 0,25 cm die optimalen r-Werte mit den zugehörigen Werten der größten Feldstärken $F^{(0)} = F^{(180)} = F^*$.

Tragen wir jetzt F^* als Funktion von ϱ auf (Abb. 8) und verbinden die berechneten Punkte durch eine Kurve, so bekommen wir als absolutes Optimum $\varrho = 0{,}17$ cm. Dazu gehört der Wert $r = 0{,}513$ cm (wo die letzte Stelle unsicher ist). Der zugehörige Maximalwert der Feldstärke ist $F^* = 5{,}26\ \mathrm{cm}^{-1}$ (letzte Stelle unsicher).

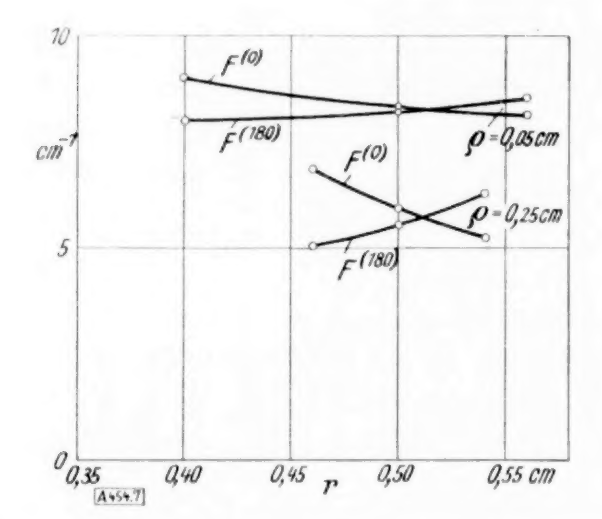


Abb. 7. Interpolation der optimalen Abmessungen und der zugehörigen maximalen Feldstärke $F^{(0)} = F^{(180)} = F^*$ ($R = 1$ cm).

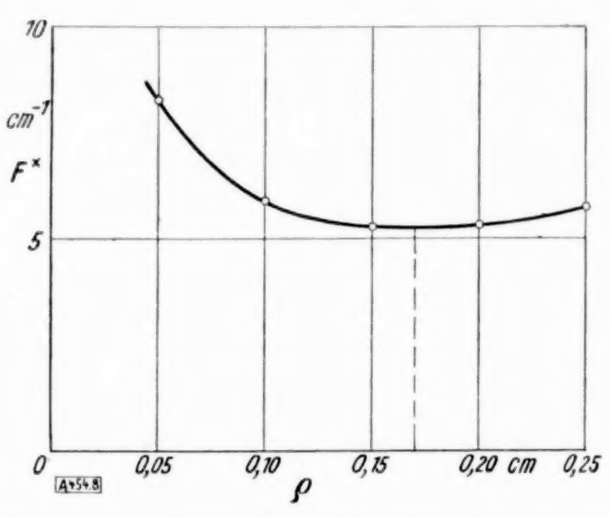


Abb. 8. Optimale Feldstärkehöchstwerte F^* in Abhängigkeit vom Leiterradius ϱ ($R = 1$ cm).

Der V. D. E. schreibt nun für Drehstromkabel gleiche Isolationsstärken zwischen den Leitern einerseits und zwischen Leitern und Bleimantel andererseits vor. Diese Forderung, die durch die Beziehung

$$r = \frac{R + \varrho}{1 + \sqrt{3}} \qquad (33)$$

erfüllt wird, führt bei $R = 1$ cm zu Mittenradien $r < 0{,}5$ cm, so daß der absolute Maximalwert von F in dem untersuchten Bereich stets bei $\sigma_1 = 0^0$ liegt. Wir berechnen zu den Leiter-

Tabelle 5: Maximalwerte der Feldstärke bei einpoligem Erdschluß ($V = 1$, $R = 1$ cm).

Nr.	ϱ cm	r cm	Ungeerdeter Leiter 1: $F^{(0)}$ cm^{-1}	$F^{(30)}$ cm^{-1}	$F^{(180)}$ cm^{-1}	$F^{(330)}$ cm^{-1}	Geerd.L.3: $F^{(240)}$ cm^{-1}
1	0,05	0,40	11,50	11,70	12,78	11,45	5,03
2	0,05	0,50	11,53	11,73	13,55	11,56	3,52
3	0,05	0,56	11,73	11,94	14,24	11,81	2,82
4	0,10	0,40	7,77	8,02	8,96	7,68	5,32
5	0,10	0,50	7,34	7,62	9,83	7,36	3,74
6	0,10	0,56	7,32	7,62	10,62	7,40	3,04
7	0,15	0,42	6,69	6,99	7,98	6,63	5,86
8	0,15	0,50	6,01	6,37	8,88	6,04	4,38
9	0,15	0,56	5,79	6,19	9,90	5,90	3,56
10	0,20	0,44	6,51	6,89	7,84	6,49	6,41
11	0,20	0,50	5,71	6,04	8,82	5,66	5,06
12	0,20	0,56	5,28	5,59	10,27	5,24	4,09
13	0,25	0,46	6,75	7,43	8,44	7,00	7,12
14	0,25	0,50	5,92	6,44	9,42	6,06	5,96
15	0,25	0,54	5,36	5,83	10,73	5,46	5,09

radien $\varrho = 0{,}05$, $0{,}10$, $0{,}15$, $0{,}20$, $0{,}25$ cm nach Gl. (33) die vorgeschriebenen Radien r und suchen zu diesen durch graphische Interpolation (s. Abb. 7) die zugehörigen Höchstwerte $F^{(0)}$. Die Ergebnisse sind in Tab. 4 zusammengefaßt.

An vorhandenen Unterlagen, die zum Vergleich mit den von uns berechneten Zahlen herangezogen werden können, kommt vor allem die von R. W. Atkinson[6]) auf Grund von Messungen aufgestellte empirische Formel in Frage. Dieser Autor findet für Kabel, die etwa den V. D. E.-Vorschriften entsprechen, den Höchstwert der Feldstärke ebenfalls an der Stelle $\sigma_1 = 0^0$: „Dieser Wert ist in allen praktisch wichtigen Fällen gleich dem Höchstwert in einem Einleiterkabel vom gleichen Leiterdurchmesser, dessen Betriebsspannung gleich der Phasenspannung des Dreileiterkabels ist, und dessen Isolierungsdicke gleich ist dem Abstand zwischen Leiteroberfläche und Kabelmittelpunkt im Querschnittsbilde." Verfahren wir nach dieser Rechenvorschrift, die sich in der Form

$$F^{(0)}_{\text{Atk}} = \frac{V}{\varrho \cdot \ln \dfrac{r}{\varrho}}$$

schreiben läßt, so erhalten wir die in Tab. 4 als $F^{(0)}_{\text{Akt}}$ eingetragenen maximalen Feldstärken. Der Vergleich mit unseren Zahlen $F^{(0)}$ zeigt, daß die Formel Atkinsons eine gute Näherung darstellt, da der Leiterradius $\varrho = 0{,}05$ cm bereits außerhalb des Bereichs der praktischen Anwendungen liegt.

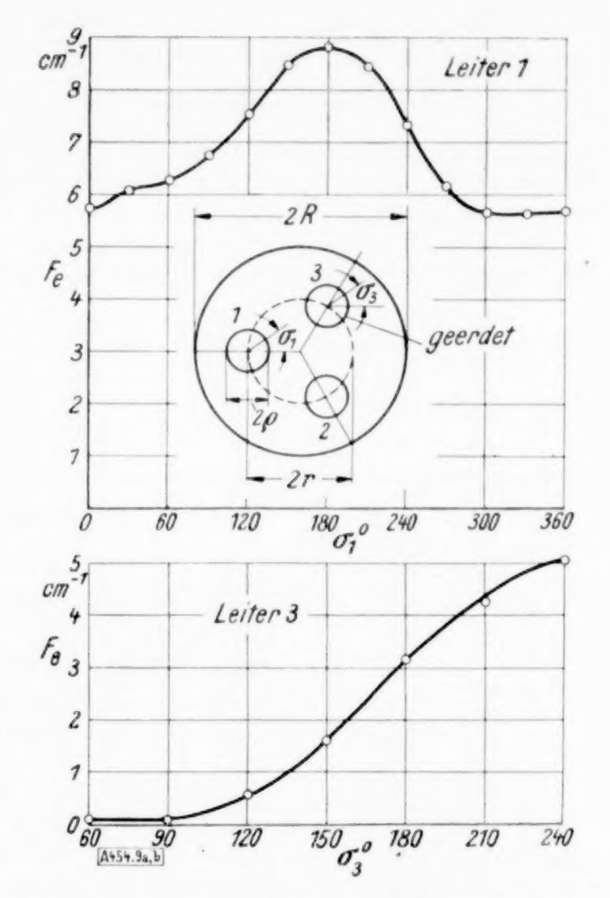


Abb. 9a und b. Maximale Feldstärke a. d. Leitern bei Erdschluß. Scheitelw. d. Phasensp. $V = 1$. Dim.: $R = 1$ cm, $\varrho = 0{,}2$ cm, $r = 0{,}5$ cm.

3. Maximalwerte der Feldstärke bei Erdschluß. Wir berechnen jetzt ganz analog nach Gl. (27) auch für den einpoligen Erdschluß die zeitlichen Maximalwerte F_e der Feldstärke bei der Scheitelspannung $V = 1$. Den Verlauf dieser Größe am Umfang der beiden ungeerdeten sowie des geerdeten Leiters ermitteln wir wieder für das Beispiel 11 und erhalten das in Abb. 9a und b dargestellte Ergebnis. Da sich gegenüber dem normalen Betrieb die Spannung Leiter gegen Mantel auf den $\sqrt{3}$-fachen Wert erhöht hat, während die Spannung zwischen den Leitern die gleiche geblieben ist, so zeigt F_e bei $\sigma_1 = 180^0$ ein starkes absolutes Maximum. Dieses ist auch in allen übrigen Fällen vorhanden. Der Höchstwert auf der Innenseite des Leiters, der nur bei extrem kleinen Radien r als solcher in Erscheinung tritt, liegt an der dem geerdeten Leiter 3 benachbarten Stelle $\sigma_1 = 30^0$.

Tab. 5 enthält die Werte F_e des ungeerdeten Leiters 1 bei $\sigma_1 = 0^0, 30^0, 180^0, 330^0$, sowie in der letzten Spalte den stets bei $\sigma_3 = 240^0$ gelegenen Maximalwert des geerdeten Leiters 3. Wie aus Tab. 5 hervorgeht, liegt bei Bemessung des Kabels nach der V. D. E.-Vorschrift der absolute Maximalwert von F_e stets bei $\sigma_1 = 180^0$. Für die Leiterradien $\varrho = 0{,}05$, $0{,}10$, $0{,}15$, $0{,}20$, $0{,}25$ cm interpolieren wir auch hier wieder graphisch die zu den vorgeschriebenen Radien r gehörenden Werte $F_e^{(180)}$ (s. Tab. 4).

4. Die Kapazität. Da uns die Konstanten A_0 und a_0 bekannt sind, können wir aus den Gl. (32) die Teilkapazitäten und die Betriebskapazität ermitteln. Wir setzen $\varepsilon = 1$ und erhalten die in Tab. 6 unter k_{11}, k_{12}, C_b eingetragenen Zahlen. Wir wollen diese exakten Werte noch mit den sich aus der bekannten Näherungsformel ergebenden vergleichen: L. Lichtenstein[7]) spiegelt die Leiter in der z-Ebene am Bleimantel und erhält für die Potentialkoeffizienten:

$$a_{11}^{(L)} = \frac{18}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{R^2 - r^2}{R \cdot \varrho} \;\frac{km}{\mu F}, \qquad a_{12}^{(L)} = \frac{9}{\varepsilon} \cdot \ln \frac{R^4 + r^4 + r^2 \cdot R^2}{3 \cdot r^2 \cdot R^2} \;\frac{km}{\mu F},$$

[6]) R. W. Atkinson: a. a. O.

[7]) L. Lichtenstein: a. a. O.

wobei er der Bedingung Rechnung trägt, daß das Potential am Bleimantel verschwindet. Wir berechnen nach diesem Verfahren unter Benutzung der Gl. (30) die Kapazitäten und tragen ihre prozentualen Abweichungen von den exakten Werten in den letzten drei Spalten der Tab. 6 ein. Wir bemerken allgemein ein starkes Ansteigen der Fehler in den Teilkapazitäten bei wachsendem Leiterradius. Bei der Berechnung der Betriebskapazität heben sich die Fehler nahezu auf, so daß eine sehr gute Annäherung resultiert.

Tabelle 6: Die Kapazitäten bei $\varepsilon = 1$ ($R = 1$ cm).

Nr.	ϱ cm	r cm	k_{11} $\mu F/km$	k_{12} $\mu F/km$	C_b $\mu F/km$	$\Delta k_{11}^{(L)}$ %	$\Delta k_{12}^{(L)}$ %	$\Delta C_b^{(L)}$ %
1	0,05	0,40	0,014.975	0,002.831	0,023.469	— 0,4	+ 0,5	— 0,1
2	0,05	0,50	0,017.058	0,001.942	0,022.883	— 0,3	+ 0,9	— 0,0
3	0,05	0,56	0,018.420	0,001.525	0,022.994	— 0,3	+ 1,2	— 0,0
4	0,10	0,40	0,018.700	0,004.876	0,033.329	— 2,0	+ 1,4	— 0,6
5	0,10	0,50	0,021.945	0,003.370	0,032.055	— 1,7	+ 3,3	— 0,1
6	0,10	0,56	0,024.213	0,002.685	0,032.269	— 1,6	+ 4,5	— 0,1
7	0,15	0,42	0,023.085	0,006.843	0,043.614	— 4,8	+ 2,6	— 1,3
8	0,15	0,50	0,026.774	0,005.057	0,041.944	— 4,3	+ 6,6	— 0,4
9	0,15	0,56	0,030.140	0,004.050	0,042.288	— 4,3	+ 9,7	— 0,3
10	0,20	0,44	0,028.432	0,009.178	0,055.965	— 8,9	+ 4,0	— 2,6
11	0,20	0,50	0,032.306	0,007.191	0,053.878	— 8,6	+ 10.3	— 1,0
12	0,20	0,56	0,037.211	0,005.724	0,054.384	— 8,9	+ 16.7	— 0,8
13	0,25	0,46	0,035.452	0,012.138	0,071.867	— 14,4	+ 5,7	— 4,2
14	0,25	0,50	0,039.205	0,010.093	0,069.485	— 14,5	+ 13,4	— 2,4
15	0,25	0,54	0,043.799	0,008.537	0,069.408	— 15,2	+ 21,1	— 1,8

C. Schluß.

Die der Lösung unserer Aufgabe zugrunde gelegten Idealisierungen: Homogenität des Isolierstoffes und glatte zylindrische Leiteroberflächen, bedingen eine Abweichung der Ergebnisse von der Wirklichkeit. Die erste der beiden Bedingungen kann nun für die in Frage kommenden Hochspannungskabel als praktisch erfüllt angesehen werden, da bei diesen für die Leiter- und Gürtelisolation und auch auf die Zwickel wohl durchweg das gleiche Material verwendet wird.

Schwerwiegender erscheint die Erhöhung der Feldstärke, die durch die Unterteilung der Leiter in Einzeldrähte hervorgerufen wird. Dieser Einfluß läßt sich in erster Annäherung vom Hauptproblem absondern und getrennt behandeln, wobei zweckmäßig die von W. Deutsch[8]) für das Einleiterkabel mit unterteiltem Leiter entwickelte Lösung benutzt wird. Wir könnten etwa so verfahren, daß wir für ein dem Dreileiterkabel entsprechendes konzentrisches Kabel die Feldstärkeerhöhung berechnen und dadurch einen prozentualen Zuschlag zu unseren Werten gewinnen. 454

[8]) W. Deutsch: ETZ 1911, S. 1175.

KLEINE MITTEILUNGEN

Fourier-Analyse von Kurvenzügen, die stückweise aus Ausschnitten von Sinuslinien zusammengesetzt sind. Abb. 1 bringt ein Beispiel für eine Art von Kurvenzügen, die in der Elektrotechnik neuerdings häufig anzutreffen sind. Es bezeichne (vgl. Abb. 1)

$$y_m = Y_m \sin \lambda (\omega t - \psi_m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

den Verlauf der den m-ten Abschnitt bildenden Sinuslinie und λ das Verhältnis der zugehörigen Kreisfrequenz $\nu = \lambda \omega$ zur Kreisfrequenz ω der Grundwelle des Kurvenzugs. Für die Fourier-Koeffizienten folgt dann mit $\omega t = x$ und Gl. (1)

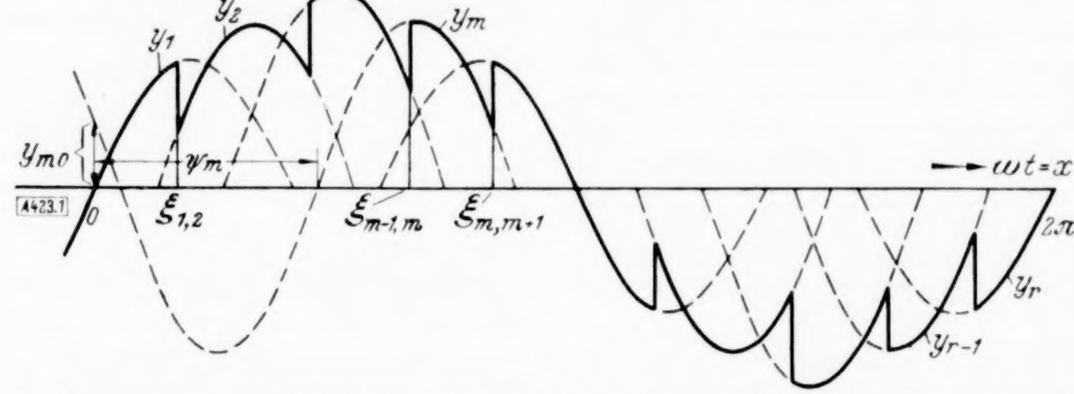


Abb. 1. Kurvenzug, der stückweise aus Ausschnitten von Sinuslinien zusammengesetzt ist.

$$\left.\begin{aligned} a_n \pi &= \int_0^{2\pi} y \cos n x \, d x \\ &= \sum_{m=1}^{r} Y_m \int_{\xi_{m-1,m}}^{\xi_{m,m+1}} \sin \lambda (x - \psi_m) \cdot \cos n x \, d x \end{aligned}\right\} \quad (2\,a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} b_n \pi &= \int_0^{2\pi} y \sin n x \, d x \\ &= \sum_{m=1}^{r} Y_m \int_{\xi_{m-1,m}}^{\xi_{m,m+1}} \sin \lambda (x - \psi_m) \cdot \sin n x \, d x \end{aligned}\right\} \quad (2\,b),$$

wobei die ξ gemäß Abb. 1 die Übergangsstellen bedeuten und $\xi_{0,1} = 0$ sowie $\xi_{r,r+1} = 2\pi$ zu setzen sind.

a) Für $n \neq \lambda$ wird

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin \lambda (x - \psi) \cdot \cos n x \, d x = \frac{\lambda}{n^2 - \lambda^2} \cdot \\ &\left\{\cos \lambda (x - \psi) \cdot \cos n x + \frac{n}{\lambda} \sin \lambda (x - \psi) \cdot \sin n x\right\} \end{aligned}\right\} (3\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin \lambda (x - \psi) \cdot \sin n x \, d x = \frac{\lambda}{n^2 - \lambda^2} \cdot \\ &\left\{\cos \lambda (x - \psi) \cdot \sin n x - \frac{n}{\lambda} \sin \lambda (x - \psi) \cdot \cos n x\right\} \end{aligned}\right\} (3\mathrm{b}).$$

Setzt man noch

$$\left.\begin{aligned} &Y_m \sin \lambda (\xi_{m-1,m} - \psi_m) - \\ &Y_{m-1} \sin \lambda (\xi_{m-1,m} - \psi_{m-1}) = s_{m-1,m} \end{aligned}\right\} . \ (4\,a),$$

$$\left.\begin{aligned} &Y_m \cos \lambda (\xi_{m-1,m} - \psi_m) - \\ &Y_{m-1} \cos \lambda (\xi_{m-1,m} - \psi_{m-1}) = \frac{1}{\lambda} s'_{m-1,m} \end{aligned}\right\} . \ (4\,b),$$

wobei $s_{m-1,m}$ den Sprung des Funktionswertes y und $s'_{m-1,m}$ den Sprung der Ableitung y' an der Stelle $\xi_{m-1,m}$ bedeuten, so erhält man nach Einsetzen von Gl. (3) in (2) die einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} a_n \cdot \pi = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum_{m=2}^{r} &\{s'_{m-1,m} \cdot \cos n \xi_{m-1,m} \\ &+ n s_{m-1,m} \cdot \sin n \xi_{m-1,m}\} \end{aligned}\right\} (5\,a),$$

$$\left.\begin{aligned} b_n \cdot \pi = \frac{1}{\lambda^2 - n^2} \sum_{m=2}^{r} &\{s'_{m-1,m} \cdot \sin n \xi_{m-1,m} \\ &- n s_{m-1,m} \cdot \cos n \xi_{m-1,m}\} \end{aligned}\right\} (5\mathrm{b}),$$

d. h. die in Gl. (2) geforderte abschnittweise Integration reduziert sich auf eine einfache Summenbildung, in die alle Sprungstellen zwischen 0 und 2π mit den zugeordneten Sprüngen s des Funktionswertes und s' von dessen Ableitungen eingehen[1])

b) Für $n = \lambda$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin \lambda (x - \psi) \cdot \cos \lambda x \, d x \\ &= \frac{1}{2\lambda} \{- \lambda x \cdot \sin \lambda \psi + \sin \lambda (x - \psi) \cdot \sin \lambda x\} \end{aligned}\right\} (6\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin \lambda (x - \psi) \cdot \sin \lambda x \, d x \\ &= \frac{1}{2\lambda} \{\lambda x \cdot \cos \lambda \psi - \cos \lambda (x - \psi) \cdot \sin \lambda x\} \end{aligned}\right\} (6\mathrm{b}).$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\left.\begin{aligned} \xi_{m,m+1} - \xi_{m-1,m} &= x_m \\ - Y_m \sin \lambda \psi_m &= y_{m0} \\ Y_m \cos \lambda \psi_m &= \frac{1}{\lambda} y'_{m0} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \quad (7),$$

so folgt aus Gl. (2) im Zusammenhang mit (4)

$$\left.\begin{aligned} a_\lambda \cdot \pi = \frac{1}{2\lambda} \Big\{ &\lambda \cdot \sum_{m=1}^{r} x_m \cdot y_{m0} \\ &- \sum_{m=2}^{r} s_{m-1,m} \cdot \sin \lambda \xi_{m-1,m} \Big\} \end{aligned}\right\} . \quad (8\mathrm{a}),$$

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda \cdot \pi = \frac{1}{2\lambda} \Big\{ &\sum_{m=1}^{r} x_m \cdot y'_{m0} \\ &+ \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{m=2}^{r} s'_{m-1,m} \cdot \sin \lambda \xi_{m-1,m} \Big\} \end{aligned}\right\} (8\mathrm{b}).$$

Für den Koeffizienten $n = 0$, der bei Wechselstromkurven die Gleichstromkomponente darstellt, ergibt sich aus der Beziehung

$$a_0 \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} y \, d x \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (9)$$

ähnlich der Herleitung von Gl. (5a) der Wert

$$a_0 \cdot 2\pi = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \sum_{m=2}^{r} s'_{m-1,m} \quad . \ . \ . \ . \quad (10).$$

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Berlin. R. Feinberg. 423

[1]) Vgl. G. Koehler und A. Walther: Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931), S. 747.

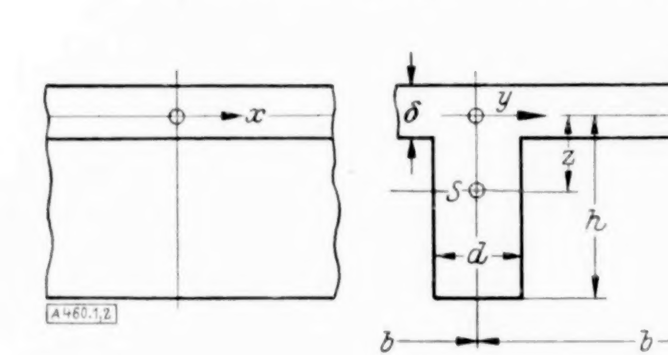
Spannungsverteilung in der Gurtplatte einer Rippendecke. Die Ungleichmäßigkeit der Spannungsverteilung in Gurtplatten von Trägern ist von Th. v. Kármán und G. Schnadel mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion und des Prinzips der kleinsten Formänderungsarbeit behandelt worden.

Die Integration wurde von den oben Genannten und ihren Schülern mit Erfolg durchgeführt in dem Falle der unendlich langen Träger mit periodischen Momentenflächen bzw. in dem Falle endlicher langer Träger mit starren Endquerschnitten.

Es läßt sich nun ein weiterer, verhältnismäßig leicht lösbarer Fall angeben, wenn man die Airysche Differentialgleichung für Volumen- und Oberflächenkräfte erweitert und Periodizität nicht in der Richtung längs der Spannweite, sondern quer zur Spannweite voraussetzt.

Äußere Kräfte in den Gurtplatten müssen angesetzt werden, um die Wirkung der Stege (oder Rippen) wiederzugeben, und Periodizität hat man bei vielen Rippen und gleichen Rippenabständen und gewisser ziemlich allgemeiner Symmetrie der Belastung.

Man erreicht dann eine vollständige Erfüllung der Randbedingungen an den Trägerenden.



Gurtplatte: Auf die Gurtplatte werden von den Stegen Schubspannungen ausgeübt, die als Kräfte $\frac{X}{\delta}$, bezogen auf die Volumeneinheit, eingeführt werden können.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}&=-X(x,y)\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}&=0\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Setzt man nun:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x=\sigma_p+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},\\ \tau=-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y},\quad \sigma_p=-\int X\,d x\end{aligned}\right\} . \quad (2),$$

so wird die Airysche Differentialgleichung zufolge der Komptabilitätsbedingungen (μ Poissonsche Zahl):

$$\left.\begin{aligned}\Delta\Delta\Phi&=f(x,y)\\ f(x,y)&=\mu\frac{\partial^2\sigma_p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_p}{\partial y^2}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Der Natur der Aufgabe nach ist hier f als eine in y periodische Funktion mit der Periode b und als in x beliebig vorschreibbare Funktion anzusehen, von der nur verlangt werden soll, daß sie überall endlich und nur an der Stelle der Rippen, d. h. über die Breite d von Null, verschieden ist.

Man kann z. B. entsprechend Abbildung setzen:

$$X=X_0(x)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{d}y\right)\right) \text{ von } y=-\frac{d}{2} \text{ bis } +\frac{d}{2},$$

$$X=0 \qquad \text{für } y<-\frac{d}{2} \text{ und } >+\frac{d}{2},$$

dann wird:

$$\sigma_p=-\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{d}y\right)\right)\int X_0\,d x$$

und damit nach Gl. (3):

$$f=-\mu X_0'+\cos\left(\frac{2\pi}{d}y\right)\left(\mu X_0'-\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2\int X_0'\,d x\right)$$

$$\text{von } y=-\frac{d}{2} \text{ bis } +\frac{d}{2}$$

$$f=0 \qquad \text{für } y<-\frac{d}{2} \text{ und } >+\frac{d}{2}.$$

Zur Integration setze man nun in bekannter Weise:

$$\Phi=\Sigma\,\Xi_n\cos\frac{2n\pi y}{b},\quad \Xi_n=\Xi_n(x),\quad \frac{2n\pi}{b}=\nu \quad (4),$$

dann erhält man durch Einsetzen in (3) für die Ξ_n die Differentialgleichungen:

$$\Xi_n^{\mathrm{IV}}-2\nu^2\,\Xi_n''+\nu^4\,\Xi_n=\frac{b}{2}\int_0^b f\cdot\cos(\nu y)\,d y \quad . \quad (5).$$

Hier kann die rechte Seite als nun bekannte Funktion von x angesehen werden, etwa zu bezeichnen mit:

$$\frac{b}{2}\int_0^b f\cdot\cos(\nu y)\,d y=\xi_n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5a).$$

Die Integration von (5) ergibt dann:

$$\left.\begin{aligned}\Xi_n=\Xi_{n,p}+A_n\,\mathfrak{Sin}(\nu x)+B_n\,\mathfrak{Cof}(\nu x)\\ +C_n x\,\mathfrak{Sin}(\nu x)+D_n x\,\mathfrak{Cof}(\nu x)\end{aligned}\right\} . \quad (6),$$

so daß man, um die Randbedingungen der Gurtplatte an den Trägerenden zu befriedigen $\left(\text{z. B. } \sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\sigma_p=0,\ \tau=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=0 \text{ für } x=\pm\frac{l}{2}\right)$, die richtige Zahl von Konstanten zur Verfügung hat. A_n, B_n, C_n und D_n sind also vollständig durch $\Xi_{n,p}$ bestimmt.

Gurtplatte und Steg. Damit ist für gegebenen Schubspannungsangriff der Stege an der Gurtplatte die Aufgabe gelöst, dagegen ist eine weitere Betrachtung nötig, wenn dieser Schubspannungsangriff erst aus dem gegenseitigen Zusammenhang von Gurtplatte und Stegen gefolgert werden muß.

In der Literatur ist bisher dieser Zusammenhang aus dem Minimum der Formänderungsarbeit berechnet worden. Er läßt sich jedoch nach einem Vorschlage von E. Reißner, der an anderer Stelle ausführlicher von ihm diskutiert werden wird, einfacher ermitteln. Berechnet man auch den Steg

als Platte, so ist die Definition der tragenden Breite und die Übergangsbedingung eindeutig. Behandelt man dagegen den Steg nach der elementaren Biegungstheorie, so gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen hier die einfachste wiedergegeben sei.

Wir führen zunächst mit Kármán den Begriff der tragenden Breite:

$$b_t = \frac{\int_0^b \sigma_x\, d y}{(\sigma_x)_{y=0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

oder die damit zusammenhängende reine Zahl:

$$\varphi = \frac{F_1}{F_2} = \frac{b_t\,\delta}{h\,d} = \frac{\delta}{h\,d}\,\frac{\int_0^b \sigma_x\, d y}{(\sigma_x)_{y=0}} \quad . \quad . \quad . \quad (7a)$$

ein.

Es ist nun, wenn $M(x)$ die Momentenfunktion, welche auf ein Rippenfeld entfällt, bedeutet, nach der elementaren Biegungstheorie:

$$(\sigma x)_{y=0} = \frac{6\,M}{F_2\,h}\,\frac{1}{1+4\,\varphi}\;{}^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder

$$(\sigma x)_{y=0}\left(1 + \frac{4\,\delta}{h\,d}\,\frac{\int_0^b \sigma_x\, d y}{(\sigma x)_{y=0}}\right) = \frac{6\,M}{F_2\,h},$$

also:

$$\frac{1}{2}\,(\sigma_x)_{y=0} + \frac{4\,\delta}{h\,d}\int_0^b \sigma_x\, d y = \frac{6\,M}{F_2\,h} \quad . \quad . \quad . \quad (8a),$$

wo der Faktor $^1/_2$ wegen der Mittelbildung über die Rippenbreite hinzutreten muß, wenn man die Gl. (2) und (6) benutzt.

Diese Bedingung stetigen Spannungsüberganges vom Steg auf den Gurt liefert die einfachste Beziehung. Man muß dann, wie wohl zulässig, die geringe Unstetigkeit im Dehnungsübergang (infolge der Querkontraktion in der Gurtplatte) vernachlässigen.

Da beide Seiten Funktionen von x allein sind, können sie beide mit der Periode gleich der Spannweite l in Fourierscher Reihen entwickelt und die Koeffizienten der linken Seite durch Vergleich paarweise bestimmt werden.

Damit ist die gestellte Aufgabe grundsätzlich gelöst. Die noch erforderliche Durchführung von Zahlenbeispielen soll an anderer Stelle gegeben werden.

Charlottenburg. H. Reißner. 460

---

1) Formel (8) ergibt sich wie folgt:

$$(F_2 + F_1)\,z = F_2\,\frac{h}{2}\,, \quad F_1 = b_t\,\delta\,, \quad F_2 = h\,d\,, \quad \frac{F_1}{F_2} = \varphi\,,$$

Schwerpunktsabstand $\quad z = \dfrac{h}{2\,(1+\varphi)}\,,$

Widerstandsmoment $\quad \dfrac{J}{z} = F_1\,z + F_2\left(\dfrac{h^2}{12} + \left(\dfrac{h}{2} - z\right)^2\right)\dfrac{1}{z}$

$$= \frac{F_2\,h}{6}\,(1+4\,\varphi)\,, \quad \sigma_x = \frac{M}{J}\,z\,.$$

Formänderung und Beanspruchung dünner kreiszylindrischer Ringe und Rohre. Bei Berechnungen von Maschinen und Baukonstruktionen treten des öfteren Fälle auf, bei denen sich der betrachtete Konstruktionsteil mit genügender Genauigkeit als ein dünner kreiszylindrischer Ring ansehen läßt (umlaufende Ringe; Behälter). Ferner kommt der Fall vor, daß z. B. ein Maschinenteil als ein aus solchen Ringen zusammengesetztes Gebilde aufgefaßt und seine Berechnung auf die Ringberechnung zurückgeführt werden kann. Wichtig ist dabei immer besonders die Kenntnis der Formänderungen, Momente und Auflagerkräfte an den Rändern.

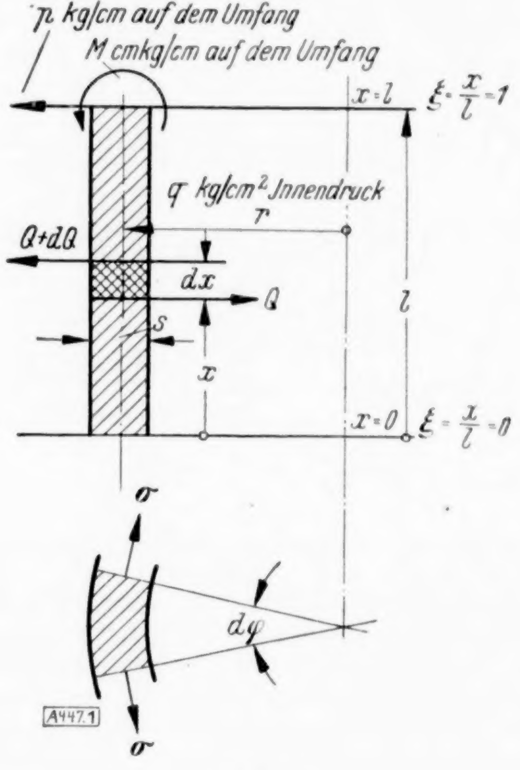


Abb. 1.

Die Gleichgewichtsbedingung für ein Element eines solchen Ringes (s. Abb. 1).

$$d\,Q = -\,\sigma\,s\cdot d\,x\cdot d\,\varphi + q\,r\cdot d\,x\cdot d\,\varphi \quad . \quad . \quad (1)$$

führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^4\,y}{d\,x^4} + \frac{12\,y}{r^2\,s^2} - \frac{12\,q}{E\,s^3} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß s klein gegenüber r ist. Die Lösung erhält eine für die praktische rechnerische Verwendung gut brauchbare Form, wenn man hyperbolische Funktionen heranzieht. Das allgemeine Integral ergibt sich aus dem partikulären Integral

$$y = \frac{q\,r^2}{E\,s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

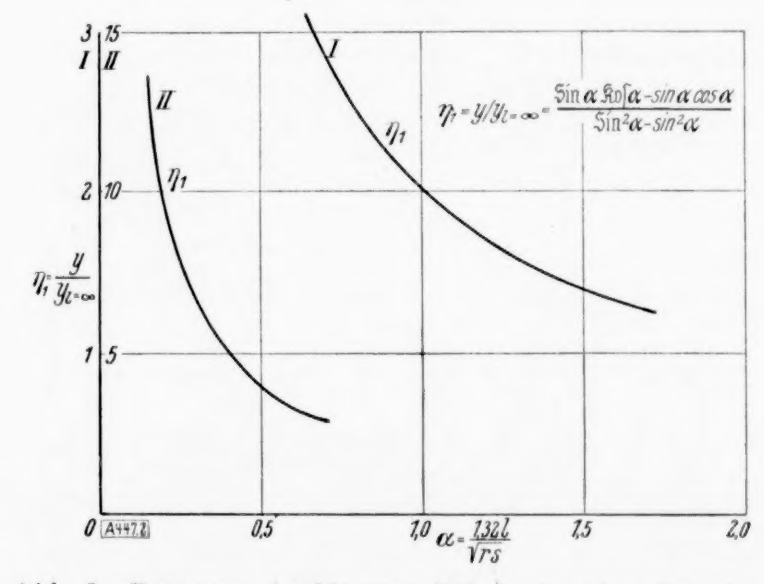


Abb. 2. Bezogene Ausbiegung bei $\xi = 1$ unter Belastung durch p, Rand $\xi = 0$ frei.

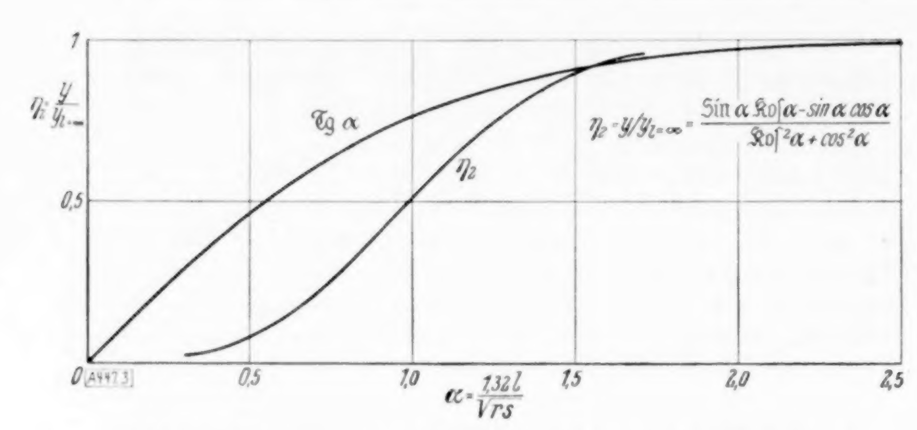


Abb. 3. Bezogene Ausbiegung bei $\xi = 1$ unter Belastung p, Rand $\xi = 0$ vollkommen eingespannt.

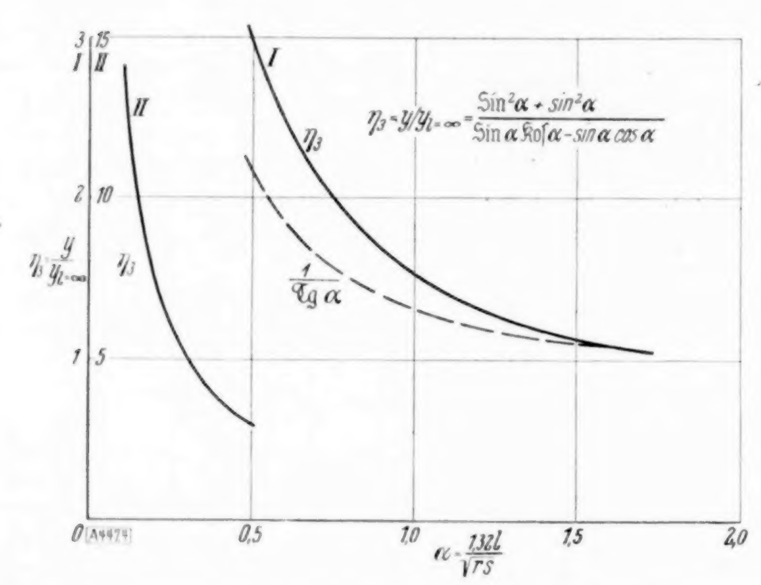


Abb. 4. Bezogene Ausbiegung bei $\xi = 1$ unter Belastung durch p, Rand $\xi = 0$ gehalten.

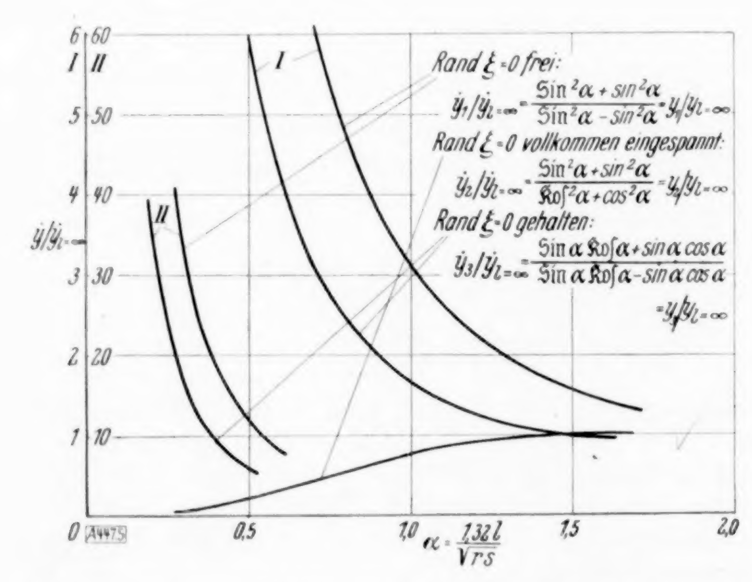


Abb. 5. Bezogener Winkel bei $\xi = 1$ unter Belastung durch p und bezogene Ausbiegung bei $\xi = 1$ unter Belastung durch M.

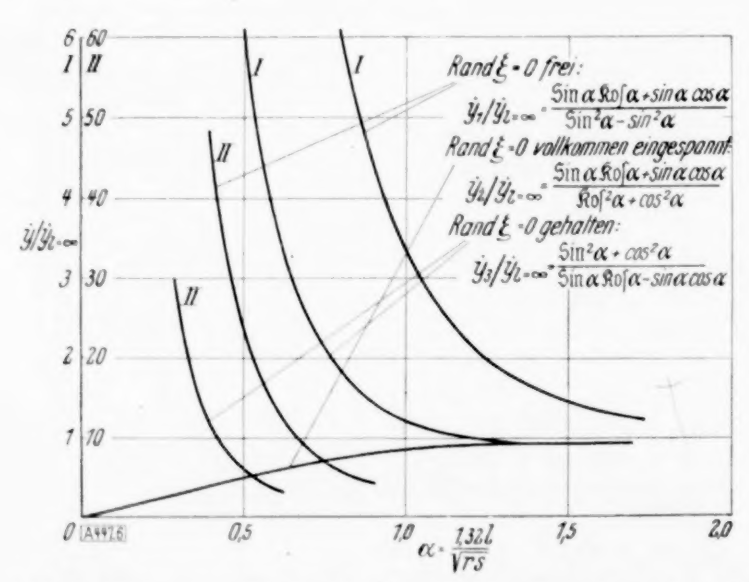


Abb. 6. Bezogener Winkel bei $\xi = 1$ unter Belastung durch M.

und dem allgemeinen Integral der reduzierten Gleichung dann in der Form

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1 \cos\alpha\xi\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\xi + C_2 \sin\alpha\xi\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\xi \\ &\quad + C_3\cos\alpha\xi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\xi + C_4 \sin\alpha\xi\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\xi + \frac{q\,r^2}{E\,s} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

mit $\alpha = \sqrt[4]{3}\,l / \sqrt{r\,s}$ und den aus den Randbedingungen zu bestimmenden Festwerten $C_1 \ldots . C_4$. Aus dieser Gleichung der elastisch verformten Meridianlinie lassen sich die Umfangs- und Längsspannungen für jede Stelle berechnen. Bestimmt man die Integrationskonstanten für die drei Belastungsfälle

I. Belastung am Rande $\xi = 1$ durch Randkraft p je Längeneinheit des Umfanges,

II. Belastung durch Innendruck q je Flächeneinheit,

III. Belastung am Rande $\xi = 1$ durch Randmoment M je Längeneinheit des Umfanges, und für die verschiedenen Einspannungsmöglichkeiten des Rohrendes $\xi = 0$, so bekommt man die folgenden Ergebnisse für die radiale Ausbiegung y und den Winkel $\dot{y} = \frac{d\,y}{d\,x}$ der Meridianlinie mit der Achse am Ende $\xi = 1$ in Abhängigkeit von der die Abmessungen zusammenfassenden kennzeichnenden Größe α.

I. Belastung durch p.

1. Ring bei $\xi = 0$ frei:

$$y = 2\sqrt[4]{3}\,\frac{r\sqrt{r}}{s\sqrt{s}} \cdot \frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha - \sin^2\alpha};$$

$$\dot{y} = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

2. Ring bei $\xi = 0$ vollkommen eingespannt:

$$y = 2\sqrt[4]{3}\,\frac{r\sqrt{r}}{s\sqrt{s}}\,\frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

$$\dot{y} = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

3. Ring bei $\xi = 0$ aufliegend:

$$y = 2\sqrt[4]{3}\,\frac{r\sqrt{r}}{s\sqrt{s}}\,\frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha};$$

$$\dot{y} = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{p}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

II. Belastung durch q.

1. Ring bei $\xi = 0$ frei: $y = \frac{r^2}{s}\frac{q}{E}$; $\dot{y} = 0$.

2. Ring bei $\xi = 0$ vollkommen eingespannt:

$$y = \frac{r^2}{s}\,\frac{q}{E}\,\frac{(\mathfrak{Cof}\,\alpha - \cos\alpha)^2}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

$$\dot{y} = 2\sqrt[4]{3}\,\frac{r\sqrt{r}}{s\sqrt{s}}\,\frac{q}{E}\,\frac{\sin\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \cos\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

3. Ring bei $\xi = 0$ aufliegend:

$$y = \frac{r^2}{s}\,\frac{q}{E}\,\frac{(\mathfrak{Sin}\,\alpha + \sin\alpha)\,(\mathfrak{Cof}\,\alpha - \cos\alpha)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin d\cos\alpha};$$

$$\dot{y} = 2\sqrt[4]{3}\,\frac{r\sqrt{r}}{s\sqrt{s}}\,\frac{q}{E}\,\frac{\sin\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

III. Belastung durch M

1. Ring bei $\xi = 0$ frei:

$$y = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha - \sin^2\alpha};$$

$$\dot{y} = 4\sqrt[4]{3^3}\,\frac{\sqrt{r}}{s^2\sqrt{s}}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

2. Ring bei $\xi = 0$ vollkommen eingespannt:

$$y = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

$$\dot{y} = 4\sqrt[4]{3^3}\,\frac{\sqrt{r}}{s^2\sqrt{s}}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

3. Ring bei $\xi = 0$ aufliegend:

$$y = 2\sqrt{3}\,\frac{r}{s^2}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha};$$

$$\dot{y} = 4\sqrt[4]{3^3}\,\frac{\sqrt{r}}{s^2\sqrt{s}}\,\frac{M}{E}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}.$$

Außer bei den Gleichungen für $\dot{y}$ im Falle II 2 und II 3 gilt folgendes. Die in diesen Ausdrücken auftretenden Funktionen von α nähern sich, wie man leicht feststellen kann, mit wachsendem α dem Grenzwert eins. Für $\alpha = \infty$, d. h., da r und s nicht gleich null sein können, für $l = \infty$, sind daher y bzw. $\dot{y}$ gleich dem von α freien Teil der Ausdrücke. Diese von α freien Glieder bedeuten also Ausbiegung $y_l = \infty$ und Neigung $\dot{y}_l = \infty$ am Ende $\xi = 1$ für unendliche Rohrlänge. Die den Kennwert α enthaltenden Funktionsausdrücke sind für die Fälle I und III in den Schaubildern dargestellt.

Bei dem längs des Randes $\xi = 0$ vollkommen eingespannten Rohre ist an diesem Rande das Moment M_0 je Längeneinheit des Umfanges

I. bei Belastung durch p:

$$M_0 = \frac{\sqrt{rs}}{\sqrt[4]{3}}\,p\,\frac{\cos\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha + \sin\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

II. bei Belastung durch q:

$$M_0 = \frac{rs}{2\sqrt{3}}\,q\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

III. bei Belastung durch M:

$$M_0 = 2M\,\frac{\cos\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

und die Auflagerkraft p_0 je Längeneinheit des Umfanges

I. bei Belastung durch p:

$$p_0 = -2p\,\frac{\cos\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

II. bei Belastung durch q:

$$p_0 = -\frac{\sqrt{rs}}{\sqrt[4]{3}}\,q\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha};$$

III. bei Belastung durch M:

$$p_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{rs}}\,M\,\frac{\cos\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\alpha - \sin\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

Beachtlich ist, daß bei dem freien am Rande $\xi = 1$ durch p belasteten Ring das Verhältnis der Umfangsspannung σ_r am belasteten Rande zu dem Werte σ_{gl}, der sich bei gleichförmiger Verteilung der Spannung ergeben würde, mit abnehmendem α dem Grenzwert 4 zustrebt und ihm schon für mäßig kleine α sehr nahe kommt. Aus dem Ausdruck für diesen Verhältniswert

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_{gl}} = 2\alpha\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Cof}\,\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\mathfrak{Sin}^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad (5)$$

erhält man nämlich, wenn man die Entwicklung der Funktionen von α nach Potenzen von α benutzt und von jeder Reihe die ersten vier Glieder beibehält, nach einigem Umformen

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_{gl}} = 4\left[1 + \frac{1}{3\cdot5\cdot7}\,\alpha^4 - \left(\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\right)^2\frac{25}{32}\,\alpha^8\right]. \quad (6)$$

oder, wenn man l, r und s einsetzt:

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_{gl}} = 4 + 0{,}1143\,\frac{l^4}{r^2 s^2} - 0{,}0026\,\frac{l^8}{r^4 s^4} \quad . \quad (6a).$$

Berlin-Charlottenburg.

Max Jobst Gercke. 447

Die Berechnung von Eigenschwingungen einer gleichseitig dreieckigen Membran mit Hilfe von Sechsecksnetzen. Das Differenzenverfahren hat in den letzten Jahrzehnten eine dauernd steigende Beachtung bei der Lösung elliptischer Randwertprobleme gefunden, weil es gegenüber anderen Lösungsverfahren die Vorteile besitzt,

1. schon nach verhältnismäßig kurzer Rechnung einen guten Überblick über den Verlauf der Lösungsfunktion zu geben, und

2. viel anschmiegungsfähiger an die Randbedingungen zu sein[1]).

Der zweitgenannte Vorteil tritt noch in weit stärkerem Grade in Erscheinung, wenn man nicht nur rechtwinklige Gitternetze verwendet, sondern jeweils dem betreffenden Problem angepaßte Netze. Ich möchte im folgenden zeigen, wie man durch Verwendung von „Sechsecksnetzen" Probleme behandeln kann, die ohne Benutzung des Differenzenverfahrens der mathematischen Behandlung, etwa mit Hilfe von Reihenentwicklungen, kaum zugänglich erscheinen. Als Beispiel werden die Eigenschwingungen einer am Rande eingespannten Membran der konstanten elastischen Kraft μ und der konstanten Dichte ϱ betrachtet, die im Ruhezustand ein gleichseitiges Dreieck D der Seitenlänge a in der x-y-Ebene bedecke. Bedeutet $u(x, y)$ die Maximalausbiegung an der Stelle x, y, so ist $u(x, y)$ Lösung des Eigenwertproblems

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= -\frac{\varrho}{\mu}\,\nu^2 u = -\lambda u \text{ im Innern von } D \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1),$$

$$u = 0 \quad \text{auf dem Rande von } D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dabei sind die Frequenzen ν noch zu bestimmen.

[1]) Das zeigte schon C. Runge: Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56, 1908, S. 225 bis 232 bei Berechnung der Torsion eines Stabes von kreuzförmigem Querschnitt.

Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir Dreiecks- oder Sechsecksnetze. Um in diesen Netzen die entsprechenden Differenzenausdrücke für Δu zu erhalten, verwenden wir die bis auf Glieder höherer Ordnung in h richtige Formel

$$\Delta f(x,y) = \frac{4}{h^2}(\bar{f} - f(x,y)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei $\bar{f}$ der Mittelwert der f-Werte auf einem Kreis mit dem Radius h um den Punkt x, y ist:

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi h}\int_0^{2\pi} f(x + h\cos\varphi, y + h\sin\varphi)\, d\varphi .$$

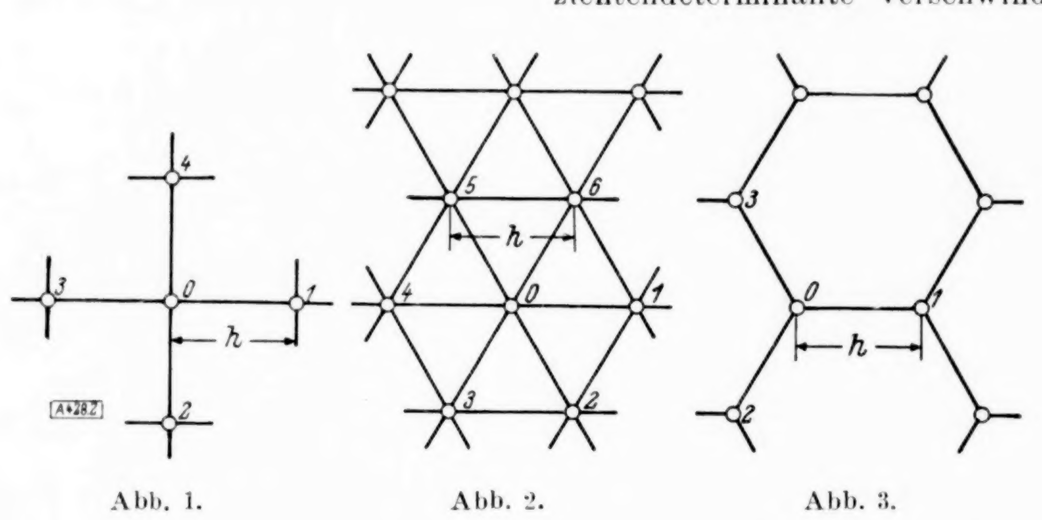


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Bei einem Sechsecksnetz (Abb. 3) entspricht dem Mittelwert das Mittel der Werte von f in den drei Nachbarpunkten, also bei einer Bezeichnungsweise der Punkte wie in Abb. 3

$$\bar{f} \approx \frac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$$

und nach (3) ergibt sich

$$\Delta f \approx \frac{4}{3h^2}(f_1 + f_2 + f_3 - 3f_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Gl. (1) entspricht also die Differenzengleichung

$$\sigma f_0 = f_1 + f_2 + f_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wo $\lambda = \frac{4}{3h^2}(3 - \sigma)$ gesetzt ist.

Analog findet man für ein quadratisches Netz (Abb. 1) den bekannten Ausdruck

$$\Delta f \approx \frac{1}{h^2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0)$$

und für ein Dreiecksnetz (Abb. 2)

$$\Delta f \approx \frac{2}{3h^2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 - 6f_0) \quad . \quad . \quad (6).$$

Das Sechsecksnetz ist im allgemeinen günstiger als das Dreiecksnetz (wie sich auch bei unserem Beispiel bestätigte), weil bei dem gleichen Problem und bei gleicher Anzahl innerer Punkte, also bei gleicher Unbekanntenanzahl

1. die zugehörige Maschenweite h beim Sechsecksnetz kleiner ist als beim Dreiecksnetz, also bessere Näherungswerte erzielt werden,

2. die Rechenarbeit beim Sechsecksnetz erheblich geringer ist als beim Dreiecksnetz, da in (4) weniger Koeffizienten auftreten als in (6)[2]).

Die Rechnung verläuft sehr einfach, wenn man nicht allzu feine Netze benutzt. Bei 16 inneren Punkten (Abb. 4) hat man für jeden der 16 inneren Punkte die Gl. (5) anzuschreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma u_1 - u_2 \hspace{5em} = 0 \\ \sigma u_2 - u_5 - u_5' - u_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Diese 16 Gleichungen für die unbekannten u-Werte haben eine nichttriviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Das ist eine Gleichung 16. Grades für σ, aus der man Näherungswerte für 16 Eigenwerte (nicht notwendig die ersten 16 Eigenwerte) erhält. Die Rechenarbeit läßt sich — und das ist für größere Anzahl innerer Gitterpunkte wichtig — sehr vereinfachen durch folgende erlaubte Ansätze:

a) Bei dem „symmetrischen Ansatz" $u_i = u_i'$ hat man nur 10 Unbekannte, also eine Gleichung 10. Grades zu lösen, von der man einige Wurzeln aus

b) dem „vollsymmetrischen Ansatz" kennt, bei dem man die Funktionswerte in allen symmetrisch gelegenen Punkten gleichsetzt, also z. B. in Abb. 4:

$$u_5 = u_5' = u_7' = u_{10}' = u_{10} = u_7 .$$

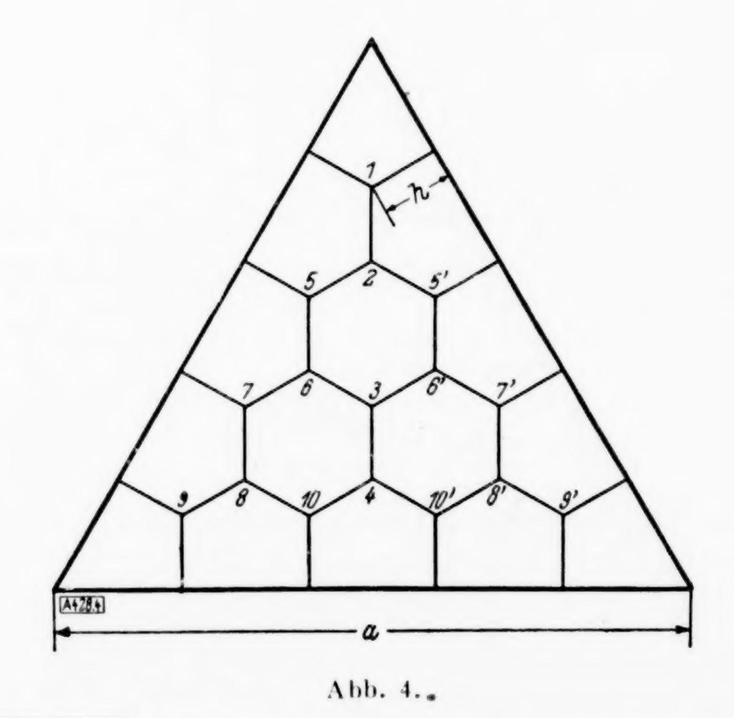


Abb. 4.

[2]) Dreiecksnetze hat bereits H. Marcus in seinem Buche: „Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten", Berlin 1932, verwendet.

Dann sind nur 5 Funktionswerte u_1, u_2, u_3, u_5, u_6 unbekannt, man hat mithin eine Gleichung 5. Grades zu lösen. Die Lösungen dieser Gleichung sind auch Lösungen der a) entsprechenden Gleichung.

c) Der „antisymmetrische Ansatz" $u_i = -u_i'$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ liefert eine Gleichung 6. Grades. Die sich aus a) und c) ergebenden Werte σ sind genau die 16 aus (7) zu berechnenden σ-Werte. Alle in a) bis c) genannten Gleichungen lassen sich durch $\sigma^2 = \tau$ in eine Gleichung von halb so hohem Grade überführen, so daß man z. B. bei b) nur eine quadratische Gleichung zu lösen hat.

Den folgenden Zeichnungen wurden Berechnungen mit 49 inneren Gitterpunkten (also $a = 8\,h\sqrt{3}$) zugrunde gelegt.

a) $\lambda_1 = \frac{52{,}5}{a^2}$,

b) $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{120}{a^2}$,

c) $\lambda_4 = \frac{200}{a^2}$,

d) $\lambda_5 = \lambda_6 = \frac{215}{a^2}$,

e) $\lambda_7 = \lambda_8 = \frac{300}{a^2}$,

f) $\lambda_9 = \lambda_{10} = \frac{330}{a^2}$.

Berlin. Lothar Collatz. 428

(Aus dem Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin.)

Knotenlinien der ersten zehn Eigenschwingungen.

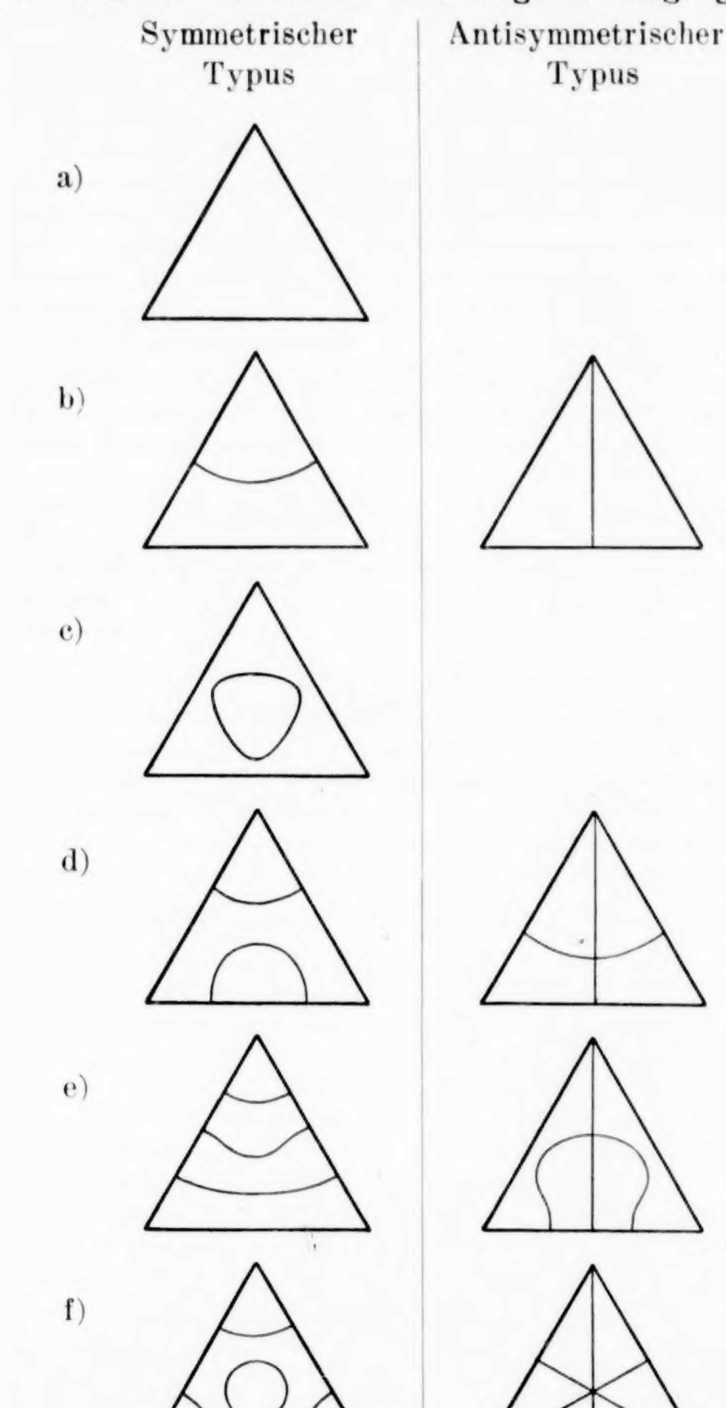


Abb. 5.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. EUGEN **JAHNKE**, weil. Prof. a. d. Bergakademie in Berlin, und Dr. Dr. FRITZ **EMDE**, Prof. d. Elektrotechnik a. d. Techn. Hochschule Stuttgart, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 2., neubearb. Aufl. (7. Tausend.) XVIII + 330 S. m. 171 Textfig. Leipzig und Berlin 1933, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 16 M.

Die Funktionentafeln von Jahnke und Emde sind so bekannt und werden so vielfach benutzt, daß sie einer besonderen Empfehlung wirklich nicht bedürfen. Endlich ist jetzt die langersehnte neue Auflage herausgekommen, für die Herr Emde allein zeichnet. Das Buch ist in fast allen Abschnitten erweitert; vieles ist neu hinzugekommen. Das soll hier nicht im einzelnen aufgezählt werden; hervorheben möchte ich aber die schönen zeichnerischen Darstellungen, insbesondere der komplexen Funktionen, die außerordentlich dazu beitragen, die komplexen Funktionen der Anschauung näherzubringen. Wer im numerischen Rechnen erfahren ist, wird die Leistung von Herrn Emde und seinen Mitarbeitern bewundern; der Dank aller derer, die das Werk benutzen werden, mag Herrn Emde für die unglaubliche Mühe belohnen, die er im Dienste der angewandten Wissenschaften auf sich genommen hat. Dank gebührt auch dem Verlag B. G. Teubner, der das Buch der Tradition getreu vorzüglich ausgestattet und trotzdem den Preis in mäßigen Grenzen gehalten hat. Trefftz.

Dr.-Ing. ERNST **LEHR** VDI, Spannungsverteilung in Konstruktionselementen. Auswertung der bisherigen Forschungsergebnisse für die praktische Anwendung, im Auftrage des Vereins Deutscher Ingenieure ausgearbeitet. 59 S. u. 179 Abb. im Text u. auf 9 Taf. Berlin 1934, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 7,50 M.

Das Heft enthält eine wertvolle Zusammenstellung dessen, was bisher an experimentellen Methoden zur Spannungsermittlung entwickelt worden ist und eine Darstellung der wichtigsten Ergebnisse. — Im ersten Kapitel werden nach einem einleitenden Abschnitt über den Spannungszustand und seine Veranschaulichung die experimentellen Methoden der Spannungsbestimmung beschrieben (Dehnungsmesser, Spannungsoptische Untersuchungen, Sonderverfahren für Torsionsprobleme). — Im zweiten Kapitel sind die wichtigsten zahlenmäßigen Ergeb-

nisse teils zeichnerisch, teils in Zahlentafeln dargestellt. Die Wiedergabe ist sehr übersichtlich, vor allem auf den beigegebenen neun Tafeln, die die Spannungsverteilungen für praktisch besonders bedeutsame Fälle enthalten. Ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis ergänzt diese Darstellungen.

Im Vordergrunde der Betrachtungen stehen naturgemäß die zweidimensionalen, d. h. die ebenen und die rotationssymmetrischen Probleme. Wenn das Heft die anregende Wirkung hat, die es erzielen möchte, so ist zu hoffen, daß auch die Untersuchung der ungleich schwierigeren, eigentlich dreidimensionalen Fälle die erwünschten Fortschritte macht.

Der Verfasser und seine Helfer haben sich nicht umsonst große Mühe gegeben. Nicht nur der praktische Ingenieur wird aus ihrer Arbeit Nutzen ziehen, auch die rechnende Festigkeitslehre (deren Leistungen, wie mir scheint, in den Ausführungen des Verfassers etwas zu schlecht wegkommen) wird aus dem reichen Anschauungsmaterial Gewinn haben. Trefftz. 462

Dr.-Ing. Dr. phil. R. **POZDĚNA**, Meter und Kilogramm. Entstehung und Sicherung des internationalen metrischen Maßsystems. Mathem.-Phys. Bibl., Reihe 1, Bd. 76. 45 S. m. 15 Fig. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

Das Buch verfolgt, wie der Verfasser im Vorwort sagt, das Ziel, „das Zustandekommen und die Sicherung des metrischen Maßsystems zu schildern, das von den Bewohnern der ganzen Kulturwelt täglich gebraucht und vielfach als ‚ganz einfach' und fast ‚selbstverständlich' hingenommen wird".

Die erste Hälfte des Buches enthält eine historische Darstellung der Entwicklung des Meßwesens. Nach der Darstellung der frühesten Ansätze zur Normalisierung der Maße und der Versuche, ein physikalisch gegebenes „Naturmaß" (z. B. in der Länge des Sekundenpendels) zu finden, wird über die wichtigsten Gradmessungen und deren Auswertung berichtet und die schließliche Einführung des metrischen Systems geschildert. — Die zweite Hälfte des Buches handelt von der Sicherung des metrischen Maßsystems, d. h. vor allem von der Zurückführung der Meterlänge auf Lichtwellenlängen mittels interferometrischer Methoden.

Das anregend geschriebene Büchlein, das auf wenigen Seiten eine Fülle des Wissenswerten enthält, kann sehr empfohlen werden.

Trefftz. 462

Dr. Dr.-Ing. GEORG **SCHEFFERS**, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Berlin, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? Mathem.-Phys. Bibl., Reihe 1, Bd. 85/86. 98 S. m. 12 Taf. u. 27 Abb. Leipzig und Berlin 1934. Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 2,40 M.

Über die Methoden, nach denen die Gradnetze der Landkarten hergestellt werden, herrscht im allgemeinen eine erstaunliche Unkenntnis. Auch in der Ausbildung der Lehramtskandidaten findet dieses Kapitel nicht immer die Beachtung, die ihm wegen der gebotenen Möglichkeit der Verbindung von Universitäts- und Schulmathematik zukommt. — Das Büchlein von Scheffers, das er der Petrischule in Leipzig als deren ehemaliger Schüler zu ihrer Hundertjahrfeier gewidmet hat, behandelt die Konstruktion der verschiedenen Kartennetze in sehr anregender Weise. Die Gesichtspunkte (Flächentreue, Winkeltreue u. dgl.), nach denen ein Gradnetz konstruiert wird, werden besprochen und die Konstruktionen im einzelnen angegeben und ausgeführt. Zahlreiche historische Ausführungen machen die Lektüre dieses Buches, dem man eine große Verbreitung wünschen möchte, besonders reizvoll. Trefftz. 462

KARL **MENNINGER**, Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. X + 364 S. Breslau 1934, Ferdinand Hirt. Geh. 7 M, geb. 9 M.

Wer als Praktiker oder Theoretiker der Wirtschaft oder Technik die Zahl ständig gebraucht, ist sich oft gar nicht bewußt, welche gewaltige kulturelle Leistung die nach und nach gewachsene Kunst des Rechnens bedeutet. Der Mathematiker findet hier ein geeignetes Thema für allgemeinverständliche Vorträge bei besonderen Gelegenheiten. Es sei an die schöne Rede erinnert, die der einstige Vertreter der angewandten Mathematik an der Universität Göttingen, Karl Runge, bei der Jahresfeier der Universität 1915 gehalten hat: Mathematik und Bildung (Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 24, S. 400 bis 415). Ref. hat öfter in Festreden über solche Dinge gesprochen. Eine reichfließende Quelle für derartige Vorträge bietet das anzuzeigende Buch. Mit einem staunenswerten Fleiß und Geschick hat der Verfasser aus gedruckten Werken und aus vielen Museen des In- und Auslandes zusammengetragen, was sich über Zahlzeichen, Zahlwörter und das Rechnen mit den vier einfachen Rechnungsarten sagen läßt bis zur Einführung der „neuen" Zahlschrift, „der indischen, dem endgültigen Sieg eines fremden Kulturgutes nach tausendjähriger Wanderung, aber auch dem Sieg des Geistes, den er mit der reinen Stellenordnung in der langen Geschichte der Zahlschrift endlich erlangt". 170 schöne Abbildungen ergänzen den Text. Sehr praktisch ist die Art, wie auf sie auch an späteren Stellen verwiesen wird: (B 87) d. h. Bild auf S. 87. Verfasser hat nicht mit der „mathematischen Brille" die Entwicklung rein gedanklich betrachtet; sieht doch diese Brille nach seiner Meinung nicht immer kulturgeschichtlich richtig. Er vermeidet daher auch die üblichen Kunstwörter, wie System, dezimal u. a. und gebraucht nur deutsche Ausdrücke, wie Zehner-Stufung, Zwanziger-Bündel usw. Mit besonderer Vorliebe ist er den Zahlen- und Geldnamen nachgegangen. Das auf S. 269 erwähnte Dollarzeichen, das er als vielleicht aus dem lb, dem Zeichen des Pfundes *tt*, entstanden angibt, ist nach der eingehenden Untersuchung des kürzlich gestorbenen amerikanischen Historikers der Mathematik Cajori aus p^s (peso) entstanden (The Evotution of the Dollarmark. Popular Science Monthly Dez. 1912). Für eine neue Auflage möchte Ref. empfehlen, dem Leser nicht mehr M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik als „ausgezeichnetes Quellenwerk" zu nennen; neben der mit Recht genannten zuverlässigen Geschichte der Elementarmathematik von Tropfke wären die schönen Bändchen 1 u. 34 der Lietzmann-Wittingschen Mathematisch-physikalischen Bibliothek anzugeben: Löffler, Ziffern und Ziffernsysteme.

Ein ausführlicher Sachweiser erleichtert den Gebrauch des auch dem Leserkreis dieser Zeitschrift sehr zu empfehlenden volkstümlichen Buches.

Frankfurt a. M. W. Lorey. 431

E. **STEINITZ** und H. **RADEMACHER**, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. von R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. B. L. van der Waerden. Bd. 41.) Berlin 1934. Julius Springer Verlag. XII + 351 S. Preis geh. 27 M, geb. 28,80 M.

In der bekannten, meisterhaft klaren, strengen und geistreichen Darstellung, die alle Schriften von Steinitz auszeichnet und die sich in gleicher Weise

in den von Rademacher stammenden Paragraphen vorfindet, wird eine systematische Theorie der konvexen Polyeder des dreidimensionalen Raumes gegeben. Sie gipfelt in dem „Fundamentalsatz der konvexen Typen": Jedes K-Polyeder kann als konvexes Polyeder realisiert werden. Ein K-Polyeder ist ein rein kombinatorisch aus „Ecken", „Kanten" und „Flächen" durch Angabe der wechselseitigen Inzidenzen aufgebauter Komplex, der gewissen einfachen Bedingungen (z. B. zusammenhängend zu sein und die Eulersche Charakteristik der Kugelfläche zu haben) genügt. Zum gleichen Typus gehören zwei Polyeder, wenn sie denselben kombinatorischen Aufbau besitzen. — Nach einem historischen Überblick über die Polyedertheorie wird der Begriff des Polyeders axiomatisch kombinatorisch definiert, wobei der Fundamentalsatz der Flächentopologie kombinatorisch bewiesen wird, also auch Polyeder höheren Zusammenhanges abgehandelt werden, ohne auf ihre ebenflächige Realisierbarkeit Rücksicht zu nehmen. Im dritten Abschnitt werden drei Beweise für den Fundamentalsatz der konvexen Typen gegeben. Bei den rein geometrischen Beweisen wird Wert darauf gelegt, die Theorie der konvexen Polyeder allein auf Grund der Axiome der Verknüpfung und Anordnung aufzubauen. Zum Beispiel wird als Hilfssatz allein mit diesen Axiomen der Jordansche Kurvensatz für Polygone der Ebene und der entsprechende Satz für ebenflächige Polyeder des euklidischen Raumes bewiesen. Als weiterer Hilfssatz wird gezeigt, daß ein einfaches (d. h. sich nicht selbst durchdringendes) ebenflächiges Polyeder des euklidischen Raumes stets orientierbar ist, die projektive Ebene sich also nicht ohne Selbstdurchdringungen als ebenflächiges Polyeder realisieren läßt. — An den dritten Beweis schließt sich die strenge Begründung dafür an, daß je zwei Polyeder von gleichem kombinatorischen Aufbau (Typus) stetig ineinander überführbar sind und daß es ∞^k verschiedene Polyeder von vorgegebenem Typus gibt; k ist die Anzahl der Kanten, und kongruente Polyeder werden als nichtverschieden betrachtet.

H. Seifert. 472

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

A. L. **BOWLEY,** Prof. a. d. Universität London, Grundzüge der mathematischen Ökonomik. Beiträge zur quantitativen Wirtschaftsforschung herausgegeben von Eugen ALTSCHUL. Band I. 128 S. m. 19 graph. Darstellungen. Leipzig 1934, Verlag Hans Buske. Preis geh. 8 M.

HEINRICH **LIEBMANN,** o. Prof. a. d. Un. Heidelberg, Synthetische Geometrie. (Teubners mathem. Leitfäden Bd. 40.) 109 S. m. 45 Fig. Leipzig und Berlin 1934, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 5,60 M.

Aerodynamic Theory, A General Review of Progress. Under a grant of the Guggenheim Fund for the promotion of aeronautics, hrsg. v. William Frederick DURAND. Vol. I: Mathematical Aids (W. F. Durand), Fluid Mechanics (W. F. Durand und Max M. Munk), Historical Sketch (R. Giacomelle und E. Pistolesi). 394 S. m. 151 Fig. Berlin 1934, Verlag Julius Springer. Preis geb. 20 M.

Dr. HELMUT **HASSE,** o. ö. Prof. d. Math. a. d. Un. Marburg, Aufgabensammlung zur höheren Algebra. (Sammlg. Göschen Bd. 1082.) 175 S. Berlin und Leipzig 1934, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Dr.-Ing. E. h. WILHELM **NUSSELT** VDI, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. München, Technische Thermodynamik. (Sammlg. Göschen Bd. 1084.) 144 S. m. 65 Abb. Berlin und Leipzig 1934, Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

NACHRICHTEN

Paul Ludwik †.

Am 28. Juli ist in jähem Tode in verhältnismäßig jungen Jahren ein Mann dahingegangen, der auf dem Gebiete der Metall- und Werkstoffkunde Bleibendes geleistet hat. P. Ludwik war zu Schlan in Böhmen im Jahre 1878 geboren, studierte an der Technischen Hochschule in Prag und kam dann als Assistent an die Technik nach Wien, wo er 1904 das Doktorat erwarb und sich schon ein Jahr darauf habilitierte. 1910 wurde er außerordentlicher, 1918 ordentlicher Professor für mechanische Technologie und Materialprüfungswesen. Berufungen an die Technische Hochschule in Charlottenburg und an das Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung lehnte er ab, da er sich nicht von Wien trennen wollte. 1923 wurde er zum ordentlichen Mitglied der Wiener Akademie der Wissenschaften gewählt.

Groß sind seine Verdienste um die wissenschaftliche Metallkunde. In seinem 1909 erschienenen Büchlein „Elemente der technologischen Mechanik" behandelt er hauptsächlich vom experimentellen Standpunkt die allgemeinen Gesetze des Metallflusses beim Walzenzug und stellt die Fließkurve eines Werkstoffes dar. Wichtig sind seine Versuche über das Altern von Stahl, über Ermüdungsvorgänge und Dauerfestigkeit. Auch um die Klarstellung des Härtebegriffes hat er sich verdient gemacht, die Kugeldruckhärteprobe stammt von ihm.

Trotz dieser reichen Forschertätigkeit war er nicht einseitig, sondern ein Mensch von allgemeinen Interessen, wie die Herausgabe einer kleinen philosophischen Schrift bezeugt. Er war beliebt bei seinen Schülern und Kollegen und dabei von einer außerordentlichen Bescheidenheit, obwohl ihm äußere Auszeichnungen in hohem Maße zuteil wurden. Freunde und Fachgenossen werden ihm ein ehrendes Andenken bewahren.

K. Wolf, Wien. 461

Gesellschaft für angewandte Mathematik u. Mechanik.

Hauptversammlung in Bad Pyrmont.

Programmäßig fand am 14. und 15. September die Hauptversammlung der Gesellschaft in Bad Pyrmont, im Rahmen des Mathematiker- und Physikertages statt. Gegenüber dem im Heft 4 veröffentlichten Programm sind die folgenden Veränderungen eingetreten: Die Herren G. Vogelpohl, W. Müller und C. Weber waren an der Teilnahme verhindert, so daß ihre Vorträge ausfallen mußten. Statt dessen kamen hinzu die nachträglich gemeldeten Vorträge: R. Hermann, Aachen. Zur Zähigkeit wässeriger Lösungen (Freitag nachmittag); H. Schlichting, Göttingen, Kanaleinlaufströmung; E. W. Spannhake, Karlsruhe, Neuere Kavitationsversuche am Massachusetts Institute of Techn. in Cambridge USA. und ihre Deutung (Sonnabend vormittag). Die Vorträge waren erfreulich gut besucht, das Interesse der Teilnehmer äußerte sich in lebhafter Diskussion.

Die Mitgliederversammlung fand am Sonnabend, 15. September, vormittags 9 Uhr, unter Leitung des zweiten Vorsitzenden, Herrn Trefftz, statt. Zunächst wurde der im Laufe des Jahres verstorbenen

Mitglieder der Gesellschaft gedacht. Dann erstattete Herr Trefftz in Vertretung des Geschäftsführers den Jahresbericht. — Es wurden die folgenden Beschlüsse gefaßt: Der bisherige Vorstand wurde wiedergewählt, ebenso die Kassenprüfer A. Betz (Göttingen) und H. Fromm (Berlin). An Stelle der satzungsgemäß ausscheidenden Herren O. Föppl (Braunschweig), R. Grammel (Stuttgart), E. Meißner (Zürich) wurden die Herren Th. Pöschl (Karlsruhe) und C. Biezeno (Delft) in den wissenschaftlichen Ausschuß gewählt. Der Vorstand wurde bevollmächtigt, den Eintritt der Gesellschaft in den RTA und in den Reichsverband der Mathematikervereine zu vollziehen. Der Jahresbeitrag wurde unverändert zu 3 RM festgesetzt. Ort und Zeitpunkt der nächstjährigen Tagung sollen vom Vorstand im Einvernehmen mit den physikalischen Gesellschaften und der Deutschen Mathematikervereinigung festgesetzt werden.

Auflösung des Deutschen Verbandes Technisch-Wissenschaftlicher Vereine.

Der Deutsche Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine, dem auch die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik angehörte, hat gemäß der in Nr. 27 der RTA-Nachrichten veröffentlichten Erklärung am 1. August d. J. offiziell seine Auflösung beschlossen. Sämtliche Arbeiten des Deutschen Verbandes werden von der Reichsgemeinschaft der technisch-wissenschaftlichen Arbeit (RTA) weitergeführt.

Nicht von der Auflösung betroffen sind die selbständigen Ausschüsse und sogen. angeschlossenen Organisationen des Deutschen Verbandes (Deutsches Nationales Komitee der Weltkraftkonferenz, der Deutsche Ausschuß für das Schiedsgerichtswesen, die Siemens-Ring-Stiftung, die Technisch-Wissenschaftliche Lehrmittelzentrale und die Gesellschaft zur Herausgabe der Illustrierten Technischen Wörterbücher).

470

Persönliches.

Hr. Priv.- Dozt. Dr. R. Iglisch ist beauftragt worden, an der Techn. Hochschule in Aachen die Mathematik in Vorlesungen und Übungen zu vertreten.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Biegung krummer Stäbe. Herr G. Lindner untersucht in einem in Bd. 14, Heft 1 dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatze die Spannungsverteilung in krummen Stäben unter drei verschiedenen Annahmen über die Querschnittsverformung. Zu der in der Einleitung gegebenen Begründung und zur Schlußfolgerung möchte ich folgendes bemerken:

Herr Lindner hält es für eine Schwäche der üblichen Grashofschen Annahme, daß bei scharfwinkliger Krümmung diese Annahme zu ∞ großen Spannungen führt, weil dieses Ergebnis mit der Erfahrung nicht im Einklange steht. Wir dürfen aber nicht außer acht lassen, daß die auf Grund dieser Annahme abgeleitete lineare Spannungsverteilung sich auf rein elastische, dem Hookeschen Gesetze unterworfene Verformungen bezieht. (Auch die beiden anderen von Herrn Lindner untersuchten Fälle beziehen sich auf solche Verformungen.) Nach der strengen Elastizitätstheorie sind aber zurückspringende Ecken Unendlichkeitspunkte (Th. Wyß, Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern, S. 94). Daß in der Wirklichkeit in den Eckpunkten bei mäßiger Belastung keine Einrisse entstehen, das ist dem Spannungsausgleiche infolge plastischer Verformung und der Stoffstruktur zu verdanken. Übrigens sind für das ebene Problem strenge Lösungen bekannt (Handb. der Phys., Bd. 6, S. 184). So bleiben im Falle der reinen Biegung des Kreisringsektors in Übereinstimmung mit der Grashofschen Annahme die Querschnitte eben, und die Spannungen werden beim Grenzübergange zum Sektor mit ∞ kleinem inneren Halbmesser im Krümmungsmittelpunkt ∞.

Die im Schlußabsatze abgeleitete Folgerung aus den energetischen Betrachtungen, wonach die parabolische Krümmung, d. h. die lineare Spannungsverteilung von den drei untersuchten Fällen der streng theoretischen am nächsten käme, ist nicht richtig. Wir können nämlich die drei Fälle vom Gesichtspunkte der Variation des Spannungszustandes betrachten, wie es W. Hovgaard getan hat bei der Untersuchung des Spannungszustandes vom Balken („ZAMM" Bd. 10, S. 15). Dann hat aber nicht die lineare Spannungsverteilung mit dem größten Verdrehungswinkel φ_2, sondern die Grashofsche, hyperbolische mit dem kleinsten Verdrehungswinkel φ_1 das Vorrecht, weil die innere elastische Arbeit A mit φ proportional ist und diese nach dem Castiglianoschen Prinzip ein Minimum sein muß (Handb. der Phys., Bd. 6, S. 71). Folgedessen ist Herrn Lindners Aufsatz im Gegenteil ja gerade eine Rechtfertigung der Grashofschen Annahme. Von den vielen Versuchen, die für die gute Brauchbarkeit dieser Annahme sprechen, möchte ich hier nur an die Versuche von K. Böttcher verweisen (Forschungsarbeiten, Heft 337).

Budapest. E. Herrmann. 443

Erwiderung. Mein Beitrag dient nicht dazu, die grundlegenden Berechnungen von Grashof zu bekämpfen, sondern sie zu ergänzen und zu fördern. Eine unendlich große Spannung, die praktisch unschädlich bleibt, bedeutet einen Widerspruch, der gelöst werden muß. Bei der Erörterung von Versuchen, die mit der Theorie nicht stimmen, findet C. v. Bach: es scheine fast, als ob zu den Radien jeweils ein kleiner Zuschlag zu rechnen sei. Die hyperbolische Form entspricht diesem Sinne.

Wenn, z. B. in der Festigkeitsmaschine, eine bestimmte Durchbiegung verursacht wird, so werden sich die Spannungen nach dem Prinzip verteilen, daß die Summe der inneren Arbeiten ein Minimum wird; in diesem Falle — aber nicht allgemein — gilt die hyperbolische Form. Wenn jedoch, z. B. am Eisenbahnzughaken, eine freie Kraft wirkt, wird sie sich nach der „tiefsten Lage" einstellen, und die Spannungen werden sich so verteilen, daß die Durchbiegung und die Arbeiten größer ausfallen; in solchen Fällen besteht also die parabolische Form.

Übrigens ist die hyperbolische Form nicht eine Grashof'sche Annahme.

Stuttgart. G. Lindner. 443a

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. III. Vj. D.A. 1100.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.